Überlegungen zur Collatz-Vermutung

von Mike Winkler (Januar 2006)

Die Collatz-Folge

Man beginne mit einer beliebigen natürlichen Zahl a_0 und bilde damit die rekursive Zahlenfolge:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{für } a_n \text{ gerade} \\ 3a_n + 1 & \text{für } a_n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die Folge endet, wenn sie den Wert 1 erreicht.

Die Vermutung

Für jede natürliche Zahl a_0 erreicht die Folge nach endlich vielen Schritten den Wert 1.

Beispiele

Sei $a_0 = 5$. Dann erhält man die Folge 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Für $a_0 = 7$ lautet die Folge 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Prinzipiell kann die Zahlenfolge eine der drei folgenden Eigenschaften haben.

- die Folge endet bei 1
- die Folge wächst über alle Grenzen
- die Folge gerät in einen Zyklus

Computer haben alle Zahlen bis $3 \cdot 2^{53}$ (Stand 1999) durchprobiert; immer endet die Zahlenfolge mit 1, bestätigt also die Vermutung.

Falls die Folge in einen Zyklus gerät, dann besteht dieser aus mindestens 275.000 Zahlen, wie J.C. Lagarias 1985 zeigte.

Da auf jede ungerade Zahl eine gerade Zahl folgt betrachten wir das äquivalente Problem:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{für } a_n \text{ gerade} \\ \frac{3a_n+1}{2} & \text{für } a_n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Betrachten wir den Verlauf der Formen **ax+b** die eine beliebige natürliche Zahl innerhalb der Collatz-Folge annehmen kann.

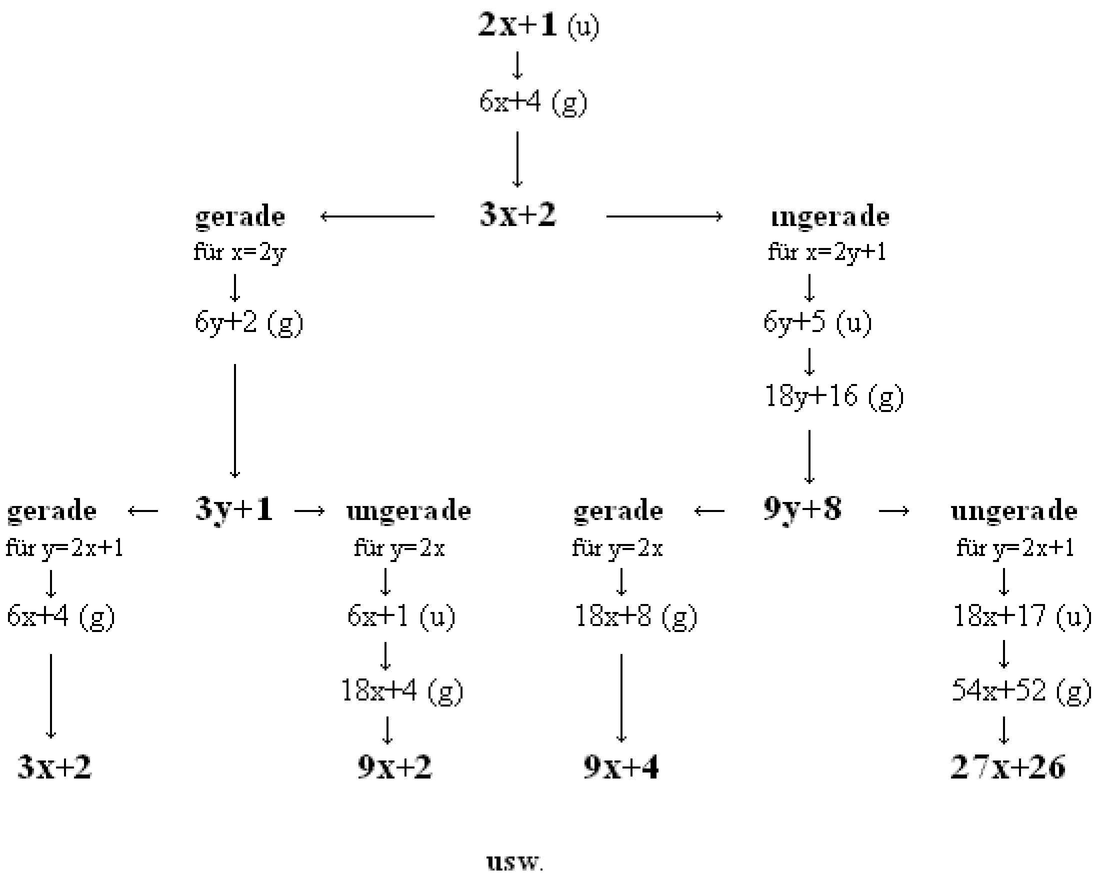
Da nach der Bildungsvorschrift jede gerade Zahl a_0 so lange halbiert wird bis sie ungerade ist, genügt es von der Form einer allgemeinen ungeraden Zahl 2x+1 auszugehen.

Nach Multiplikation mit Drei und Addition von Eins erhalten wir 6x+4. Diese Zahl ist gerade und wird wieder durch Zwei dividiert. Wir erhalten 3x+2. Nun muss eine Fallunterscheidung getroffen werden. Ist x gerade ist auch 3x+2 gerade, ist x ungerade ist 3x+2 ungerade. Für x gerade setzen wir x=2y und erhalten 6y+2. Diese Zahl ist ebenfalls gerade und nach Teilung durch Zwei erhalten wir 3y+1.

Für x ungerade setzen wir x=2y+1 und erhalten 6y+5. Diese Zahl ist ungerade, so dass wir mit Drei multiplizieren und Eins addieren. Wir erhalten die gerade Zahl 18y+16. Nach Division durch Zwei ergibt sich 9y+8.

Die Zahlen 3y+1 und 9y+8 können sowohl gerade als auch ungerade sein, je nachdem welche Zahl für y eingesetzt wird. Hier muss die nächste Fallunterscheidung getroffen werden.

Der Verlauf der Formen lässt sich mittels einer Baumstruktur darstellen.



Nach einer geraden Zahl (g) folgt die Division durch Zwei.
Nach einer ungeraden Zahl (u) folgt die Multiplikation mit Drei und die Addition von Eins.

Betrachtet man nur die Formen bei denen eine Fallunterscheidung zwischen gerader und ungerader Zahl getroffen werden muss, ergibt sich folgende Baumstruktur.

	n=1		n=2		n=3		usw.
2x+1	**3x+2**		**9x+8**		**27x+26**		
	3x+1	9x+2	9x+4	27x+20	27x+13	81x+20	
	3x+2		9x+2	27x+17	27x+20	81x+71	
			9x+1	27x+2	27x+10	81x+56	
			9x+5	27x+8	27x+5	81x+8	
			9x+7	27x+11	27x+16	81x+65	
			9x+8		27x+8	81x+53	
					27x+4	81x+47	
					27x+2	81x+44	
					27x+1	81x+2	
					27x+14	81x+62	
					27x+7	81x+11	
					27x+17	81x+26	
					27x+22	81x+74	
					27x+11	81x+17	
					27x+19	81x+29	
					27x+23	81x+35	
					27x+25	81x+38	
					27x+26		

Ist die Zahl ungerade bewegt man sich nach rechts, ist die Zahl gerade nach unten. Ein Beispiel soll das Verhalten einer Zahl im Baum veranschaulichen.

Es sei	$a_0 = 13$	=	$2 \bullet 12 + 1$	(2x+1)	
	$a_1 = 40$	=	$4 \bullet 6 + 4$	--------	(Form nicht in Baum enthalten) (danach Wechsel zu höherer Gruppe)
	$a_2 = 20$	=	$3 \bullet 6 + 2$	(3x+2)	
	$a_3 = 10$	=	$3 \bullet 3 + 1$	(3x+1)	
	$a_4 = 5$	=	$3 \bullet 1 + 2$	(3x+2)	
	$a_5 = 16$	=	$18 \bullet 0 + 16$	-------	(Form nicht in Baum enthalten) (danach Wechsel zu höherer Gruppe)
	$a_6 = 8$	=	$9 \bullet 0 + 8$	(9x+8)	
	$a_7 = 4$	=	$9 \bullet 0 + 4$	(9x+4)	
	$a_8 = 2$	=	$9 \bullet 0 + 2$	(9x+2)	
	$a_9 = 1$	=	$9 \bullet 0 + 1$	(9x+1)	

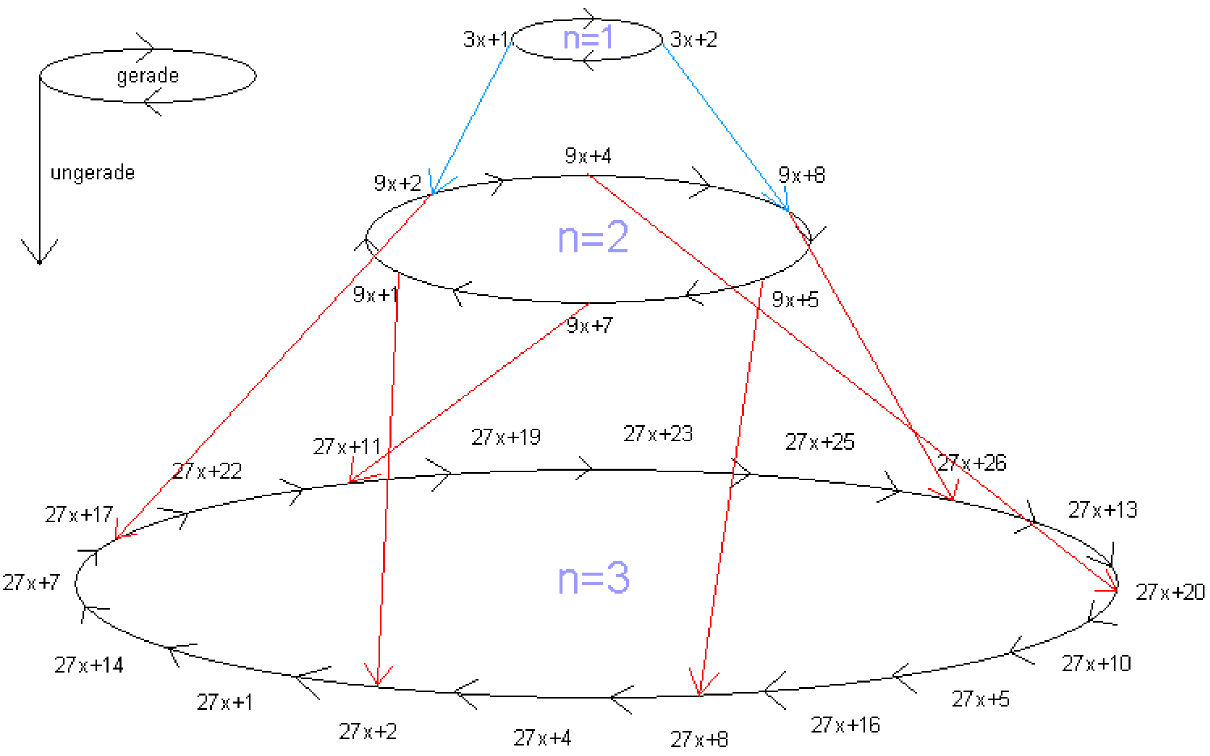
Die erste Spalte einer Gruppe (n=1, n=2, usw.) besteht aus jeweils $\mathbf{2 \cdot 3^{n-1}}$ Zahlen verschiedener Formen. Nach der Hälfte der Zahlen, also $\mathbf{3^{n-1}+1}$, ist jeweils die Form $\mathbf{3^n x+1}$ erreicht. Die letzte Form ist gleich der ersten. Somit ist jede Gruppe in der geraden Richtung (nach unten) geschlossen. In der ungeraden Richtung (nach rechts) wird von jeder Form auf die nächst höhere Gruppe weitergeleitet. Der Baumstruktur liegt folgender Konstruktionsplan zu Grunde, beginnend mit 3x+2.

$$3^n x + b \xrightarrow{\textit{ungerade}} 3^{n+1} x + \begin{cases} \dfrac{3(3^n + b) + 1}{2} & \textit{für b gerade} \\[2ex] \dfrac{3b+1}{2} & \textit{für b ungerade} \end{cases}$$

$\downarrow$ *gerade*

$$3^n x \; + \begin{cases} \dfrac{b}{2} & \textit{für b gerade} \\[2ex] \dfrac{3^n + b}{2} & \textit{für b ungerade} \end{cases}$$

Die Baumstruktur mit ringförmig angeordneten Gruppen und Weiterleitungspfeilen.



usw.