Über das Stoppzeit-Verhalten der Collatz-Iteration

von

Mike Winkler

erstmals publiziert am 27.10.2010

Eine ganz zentrale Frage

Für welche ungeraden Zahlen liefert die Collatz-Iteration nach endlich vielen Schritten eine **größere** ungerade Zahl?

Die Collatz-Iteration für eine ungerade Zahl a_0 ist gegeben durch

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & \text{für } a_n \text{ gerade} \\ \dfrac{3a_n + 1}{2} & \text{für } a_n \text{ ungerade} \end{cases}$$

> **Definition**: Bis zum Erreichen einer **größeren ungeraden** Zahl $a_{u+g} > a_0$ sei u die Anzahl der ausgeführten Iterationsschritte $\frac{3a_n+1}{2}$ für ungerade Zahlen, und g die Anzahl der ausgeführten Iterationsschritte $\frac{a_n}{2}$ für gerade Zahlen.

Die Menge der ungeraden Zahlen lässt sich unterteilen in Zahlen der Form 4x+1 und 4x+3. Für die Zahlen der Form 4x+3 liefert die Collatz-Iteration bereits nach einem Schritt (u=1, g=0) eine größere ungerade Zahl.

> **Satz**: Die Collatz-Iteration liefert für Zahlen der Form 4x+3 stets eine größere Zahl der Form 6x+5.
>
> **Beweis**: $\frac{3\cdot(4x+3)+1}{2} = 6x+5 \ (\text{ungerade}) > 4x+3 \text{ für alle } x \in \mathrm{IN}_0$

Die Zahlen der Form 4x+1 lassen sich nochmals in die vier Formen 16x+1, 16x+5, 16x+9 und 16x+13 unterteilen. Für die Zahlen der Form 16x+9 liefert die Collatz-Iteration nach drei Schritten (u=2, g=1) eine größere ungerade Zahl.

> **Satz**: Die Collatz-Iteration liefert für Zahlen der Form 16x+9 stets eine größere Zahl der Form 18x+11.
>
> **Beweis**: $\frac{3\cdot(16x+9)+1}{2} = 24x+14 \,(\text{gerade}) \Rightarrow \frac{24x+14}{2} = 12x+7 \,(\text{ungerade})$
>
> $\frac{3\cdot(12x+7)+1}{2} = 18x+11 \,(\text{ungerade}) > 16x+9 \text{ für alle } x \in \mathrm{IN}_0$

Für dieses Formen-Prinzip des Auffindens der ungeraden Zahlen, für die die Collatz-Iteration nach endlich vielen Schritten eine größere ungerade Zahl liefert, scheint eine allgemeine Gesetzmäßigkeit zu existieren.

Wir definieren T_n als die Folge der ungeraden Zahlen, für die der folgende Satz gilt.

> **Satz**: Die Collatz-Iteration liefert für ungerade Zahlen der Form $2^{u+g+1}x+T_n$ nach genau u+g Schritten stets
>
> eine größere ungerade Zahl der Form $$3^u 2x + \frac{3^u}{2^{u+g}} T_n + \sum_{i=1}^{u} \frac{3^{u-i} 2^{\alpha_i}}{2^{u+g}}$$

Die ersten Zahlen T_n lauten 3, 9, 97, 125, 109, 161, 337, 413, 641, 677, 957, 145, 365, 417, 445, 449, 549, …

Die Folge der Iterationsschritte g und u

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die ersten Formen. Aufgrund der Vielzahl an Formen sind diese ab g=2 nicht komplett ausgeschrieben. Die Zahlen T_n sind bei gleicher Zweierpotenz durch Kommata getrennt aufgelistet. Ab g=4 sind nur die beiden ersten und beiden letzten Zahlen T_n angegeben. A(g) sei die jeweilige Anzahl der Formen bzw. Zahlen T_n.

g	u	A(g)	$2^{u+g+1} \cdot x + T_n$ (Formen)
0	1	1	$2^2 \cdot x + 3$
1	2	1	$2^4 \cdot x + 9$
2	4	2	$2^7 \cdot x + 97, 125$
3	6	7	$2^{10} \cdot x + 109, 161, 337, 413, 641, 677, 957$
4	7	30	$2^{12} \cdot x + 145, 365, \ldots, 4005, 4085$
5	9	113	$2^{15} \cdot x + 129, 189, \ldots, 32685, 32753$
6	11	526	$2^{18} \cdot x + 165, 285, \ldots, 261537, 262101$
7	12	2652	$2^{20} \cdot x + 221, 573, \ldots, 1048477, 1048517$
8	14	11433	$2^{23} \cdot x + 193, 333, \ldots, 8388493, 8388529$
9	16	58040	$2^{26} \cdot x + 293, 437, \ldots, 67108629, 67108709$
…	…	…	…

Während die Zahlen g der Folge der natürlichen Zahlen entsprechen, zeigen die Zahlen u ein eher zufälliges Wachstum, wobei die Differenz benachbarter u Werte nie größer als zwei ist. Die Zahlen u können aber indirekt formelmäßig erzeugt werden, doch dazu mehr ab Seite 20.

Der Beweis der allgemeinen Gesetzmäßigkeit

Wir werden die Iteration zunächst vereinfachen und die „+1“ in der Iterationsvorschrift für ungerade Zahlen vernachlässigen. Nach u+g Schritten sind dann u Iterationsschritte $\frac{3a_n}{2}$ für ungerade Zahlen und g Iterationsschritte $\frac{a_n}{2}$ für gerade Zahlen ausgeführt worden. Es genügt dann den Ausgangsterm $2^{u+g+1}x + T_n$ mit $\frac{3^u}{2^u} \cdot \frac{1}{2^g} = \frac{3^u}{2^{u+g}}$ zu multiplizieren und wir erhalten

$$\frac{3^u}{2^{u+g}} \cdot \left(2^{u+g+1}x + T_n\right) = 3^u 2x + \frac{3^u}{2^{u+g}} T_n$$

Für die korrekte Collatz-Iteration muss nun lediglich eine Korrektursumme r hinzugefügt werden, da die „+1“ der Iterationsvorschrift für ungerade Zahlen als reiner Summand keinen Einfluss auf die Faktoren vor x und T_n hat. Es gilt dann

$$3^u 2x + \frac{3^u}{2^{u+g}} T_n + r \qquad \text{mit} \qquad r = \sum_{i=1}^{u} \frac{3^{u-i} 2^{\alpha_i}}{2^{u+g}}$$

Die Summe r ist davon abhängig, an welcher Stelle in der Iteration eine gerade oder ungerade Zahl erreicht wird. Je nach Beschaffenheit der Zahl T_n kann der Exponent α_i die ganzzahligen Werte von 0 bis u+g−1 annehmen.

$$r=\sum_{i=1}^{u}\frac{3^{u-i}2^{\alpha_i}}{2^{u+g}}=\frac{3^{u-1}2^{\alpha_1}+3^{u-2}2^{\alpha_2}+3^{u-3}2^{\alpha_3}+\cdots+3^{2}2^{\alpha_{u-2}}+3^{1}2^{\alpha_{u-1}}+3^{0}2^{\alpha_u}}{2^{u+g}}$$

Der Zähler enthält u Summanden der Form $3^{u-i}2^{\alpha_i}$, welche für die ausgeführten Iterationsschritte für ungerade Zahlen stehen. Die Differenz benachbarter Exponenten $\alpha_{i+1}-\alpha_i-1$ gibt dann an, wie oft nach jedem dieser Schritte, die Iterationsschritte für gerade Zahlen ausgeführt wurden.

Es muss nun geklärt werden, wann in der Collatz-Iteration der Zahl T_n eine gerade bzw. ungerade Zahl erzeugt wird. Da g der Folge der natürlichen Zahlen entspricht, schreiben wir u auch in Abhängigkeit von g als u_g.

Der Zähler der Summe r wird codiert

Dazu führen wir eine verkürzte Schreibweise des Zählers der Summe r ein. Diese spezielle Notation reduziert den Zähler auf ein u_g+g Tupel, dessen Elemente aus den Zahlen 0 und 1 bestehen. Ist die entsprechende Zweierpotenz enthalten, setzen wir eine 1, andernfalls eine 0.

Ein Beispiel wird dies verdeutlichen. Die Form $2^{u_g+g+1}x+T_n$ mit u_g=6, g=3 und T_n=109 ergibt $2^{10}x+109$.

Nach u_g+g=9 Iterationsschritten erhalten wir dann die Form

$$3^6 2x+\frac{3^6}{2^9}\cdot 109+\frac{3^5 2^0+3^4 2^3+3^3 2^5+3^2 2^6+3^1 2^7+3^0 2^8}{2^9}=1458x+161$$

Im Zähler der Summe r kommen die Zweierpotenzen 2^0, 2^3, 2^5, 2^6, 2^7 und 2^8 vor. Die Potenzen 2^1, 2^2 und 2^4 hingegen sind nicht enthalten. Unsere verkürzte Schreibweise liefert dafür das 9-Tupel 1 0 0 1 0 1 1 1 1, das wir wie folgt übersetzen können $1\cdot 2^0$, $0\cdot 2^1$, $0\cdot 2^2$, $1\cdot 2^3$, $0\cdot 2^4$, $1\cdot 2^5$, $1\cdot 2^6$, $1\cdot 2^7$, $1\cdot 2^8$.

Satz: Ein u_g+g Tupel repräsentiert die Abfolge der ausgeführten Iterationsschritte u_g und g der entsprechenden Collatz-Iteration einer Zahl T_n, wobei die 1 eine ungerade und die 0 eine gerade Zahl repräsentiert. Die erste Ziffer steht für die Zahl T_n.

Für das obige Beispiel bedeutet dies. Die ersten u_g+g=9 Glieder der Collatz-Folge für T_n=109 sind 109, 164, 82, 41, 62, 31, 47, 71, 107. Ordnen wir jetzt den geraden Zahlen der Folge eine 0 und den ungeraden Zahlen eine 1 zu, also 109=1, 164=0, …, erhalten wir die Folge 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, also exakt denselben binären Code aus Einsen und Nullen wie in dem zugehörigen Tupel.

Die Tupel der Formen werden sortiert

Sehen wir uns jetzt die Tupel der ersten Formen $2^{u_g+g+1}x+T_n$ an. Diese lassen sich je Form nach einer speziellen Art sortieren, die es uns schließlich ermöglichen wird die Tupel der weiteren Formen mittels eines Algorithmus zu erzeugen. Da die Summe r nicht vom x-Wert der Form abhängig ist, genügt es, sich auf die Formen mit x=0 zu beschränken. Wir beginnen bei der Form g=2 und schreiben die beiden Tupel direkt untereinander, links davon die zugehörige Zahl T_n.

g=2 (u_2=4)

T_n	u_g+g Tupel
97	1 0 1 0 1 1
125	1 0 0 1 1 1

Die grau unterlegten Elemente der beiden Tupel bilden eine quadratische Matrix, die man als gespiegelte inverse Einheitsmatrix beschreiben könnte. Diese definieren wir als die quadratische Transpositions-Matrix.

Nun lassen sich die Tupel der weiteren Formen so sortieren, dass diese sich nochmals in Segmente gliedern lassen, die eine quadratische Transpositions-Matrix enthalten, welche sich von Segment zu Segment um eine Spalte und Zeile erweitert.

Die sieben Tupel für g=3 lassen sich in zwei Segmente gliedern. Die Entwicklung der Segmente ist dabei von unten nach oben zu lesen. Deutlich wird schon hier die erweiterte Transpositions-Matrix in Segment 2.

g=3 (u_3=6)

957	1 0 0 1 1 1 0 1 1	
413	1 0 0 1 1 0 1 1 1	
109	1 0 0 1 0 1 1 1 1	
677	1 0 0 0 1 1 1 1 1	Segment 2
161	1 0 1 0 1 1 0 1 1	
641	1 0 1 0 1 0 1 1 1	
337	1 0 1 0 0 1 1 1 1	Segment 1

Die 30 Tupel für g=4 lassen sich in insgesamt sieben Segmente gliedern. Da hier jedoch mehrere Segmente mit gleicher Transpositions-Matrix existieren, müssen wir eine weitere Unterteilung vornehmen.

Die Segmente einer Form lassen sich nochmals zu verschiedenen Gruppen ordnen. Die Gruppenzugehörigkeit richtet sich dabei nach den vorderen Elementen der Tupel, die nicht zur Transpositions-Matrix gehören.

g=4 (u_4=7)

	Gruppe 1		Gruppe 2
2213	1 0 0 0 1 1 1 1 1 0 1		
4005	1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1		
549	1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1		
1509	1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 1		
901	1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1		
4089	1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1		
2669	1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1	849	1 0 1 0 0 1 1 1 1 0 1
365	1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1	2641	1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1
1005	1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1	3281	1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1
1965	1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 1	145	1 0 1 0 0 1 0 1 1 1 1
1357	1 0 0 1 0 0 1 1 1 1 1	3633	1 0 1 0 0 0 1 1 1 1 1
2973	1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 1	1153	1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1
669	1 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1	2945	1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1
1309	1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1	3585	1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1
2269	1 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1	449	1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1
445	1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1	2721	1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1
2237	1 0 0 1 1 1 0 1 0 1 1	417	1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1
2877	1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1	1057	1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1

Der Algorithmus zum Erzeugen der Tupel der Form g

Den entscheidenden Schritt auf dem Weg zum Algorithmus liefert die folgende Beobachtung.

Die vorderen Stellen bis zur Transpositions-Matrix eines Tupels des kleinsten Segments einer Gruppe der Form g entsprechen genau einem Tupel der Form g−2, gefolgt von einer Null.

g=4 (u_4=7)

2213	1 0 0 0 1 1 1 1 1 0 1			
4005	1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1			
549	1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1			
1509	1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 1			
901	1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1			
4089	1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1			
2669	1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1	849	1 0 1 0 0 1 1 1 1 0 1	
365	1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1	2641	1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1	
1005	1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1	3281	1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1	
1965	1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 1	145	1 0 1 0 0 1 0 1 1 1 1	
1357	1 0 0 1 0 0 1 1 1 1 1	3633	1 0 1 0 0 0 1 1 1 1 1	
2973	1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 1	1153	1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1	
669	1 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1	2945	1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1	
1309	1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1	3585	1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1	
2269	1 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1	449	1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1	
445	1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1	2721	1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1	
2237	1 0 0 1 1 1 0 1 0 1 1	417	1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1	
2877	1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1	1057	1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1	Tupel von g=4
125	1 0 0 1 1 1	97	1 0 1 0 1 1	Tupel von g=2

Die restlichen Stellen der neuen Tupel der ersten Segmente werden von der ersten Transpositions-Matrix und den Schluss-Elementen gebildet.

Die erste, kleinste Transpositions-Matrix einer Gruppe kann entweder zwei oder drei Zeilen und Spalten besitzen, die Schluss-Elemente bestehen aus ein oder zwei Einsen. Dies ist von den u Werten der beiden vorhergehenden Formen abhängig. Voraussetzung für den Algorithmus sind somit die g und u Werte einer Form. Der Algorithmus läuft dann in zwei Teilen ab.

1.Teil: Bildung der ersten Segmente der Gruppen von g

Man bilde zunächst die erste Transpositions-Matrix mit ($u_{g-1} - u_{g-2} + 1$) Zeilen und Spalten. Vor die Zeilen der Matrix wird dann eine Null, sowie je Gruppe ein Tupel der Form g−2 gesetzt. Die Anzahl der Gruppen von g ist also gleich der Anzahl der Tupel von g−2. Die Schluss-Elemente bilden ($u_g - u_{g-1}$) Einsen.

2.Teil: Bildung der weiteren Segmente der Gruppen von g

Das jeweils nächste Segment einer Gruppe wird gebildet, indem sich die Transpositions-Matrix um eine Zeile und Spalte erweitert und sich die Anzahl der vorderen Elemente um ein Element verringert. Dabei rückt die 0 vor der Transpositions-Matrix jeweils eine Stelle auf und ersetzt die vor ihm stehende 1. Dieser Vorgang wird so oft wiederholt bis alle aufeinander folgenden Einsen ersetzt sind und die vorrückende 0 an eine weitere 0 grenzt.

Wir wollen den Algorithmus verdeutlichen, indem wir die Tupel einer Gruppe der Form g=5 erzeugen.

Algorithmus Teil 1 Bildung der ersten Segmente der Gruppen von g=5

Die erste Transpositions-Matrix besitzt zwei Zeilen und Spalten. Denn $u_4 - u_3 + 1 = 7 - 6 + 1 = 2$.

1 0
0 1

Vor die Zeilen der Matrix wird eine Null, sowie je Gruppe ein Tupel der Form g=3 gesetzt.

0 1 0
0 0 1

Da wir hier nur die Tupel einer Gruppe erzeugen wollen, wählen wir das Tupel von g=3 für T_n=161.

	1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0
	1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1
161	1 0 1 0 1 1 0 1 1

Die Schluss-Elemente bilden zwei Einsen. Denn $u_5 - u_4 = 9 - 7 = 2$. Damit ist Phase 1 abgeschlossen.

1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1
1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1

Algorithmus Teil 2 Bildung der weiteren Segmente der Gruppen von g

Nun erzeugen wir die Tupel der weiteren Segmente dieser Gruppe, indem die Transpositions-Matrix je Segment um eine Spalte und Zeile erweitert und mit der vorstehenden Null die vorstehende Eins ersetzt wird. Der Rest der vorderen Elemente bleibt unverändert.

1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1	
1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 1 1	
1 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1	
1 0 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1	Segment 3
1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1	
1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1	
1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1	Segment 2
1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1	
1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1	Segment 1

Im dritten Segment grenzt die die Null vor der Transpositions-Matrix an eine andere Null, so dass diese Gruppe kein weiteres Segment mehr besitzen kann. Damit ist Phase 2 abgeschlossen.

Genauso verfährt man jetzt mit den anderen sechs Tupeln der Form g=3.

Die Beziehungen zwischen den Gruppen, Segmenten und Tupel

Die folgenden zwei Sätze fassen die Beziehung zwischen der Anzahl A(g) der Gruppen, Segmente und Tupel benachbarter Formen zusammen. Man vergleiche mit der Tabelle auf Seite 4.

Satz: Für eine ganze Zahl g≥2 existieren A(g) Formen $2^{u_g+g+1}x+T_n$. Die A(g) Tupel mit je u_g+g Elementen, gliedern sich in A(g−1) Segmente, die sich auf A(g−2) Gruppen verteilen.

g=2: Die A(2)=2 Tupel gliedern sich in A(1)=1 Segment, das sich auf A(0)=1 Gruppe verteilt.

g=3: Die A(3)=7 Tupel gliedern sich in A(2)=2 Segmente, die sich auf A(1)=1 Gruppen verteilen.

g=4: Die A(4)=30 Tupel gliedern sich in A(3)=7 Segmente, die sich auf A(2)=2 Gruppen verteilen.

g=5: Die A(5)=113 Tupel gliedern sich in A(4)=30 Segmente, die sich auf A(3)=7 Gruppen verteilen.

Satz: Die Anzahl der Gruppen der Form g, die gleich viele Segmente besitzen, entspricht der Anzahl aller Segmente der Form g−1, die gleich viele Tupel besitzen.

Für g=4 existieren insgesamt 2 Segmente mit je 3 Tupeln, 2 Segmente mit je 4 Tupeln, 2 Segmente mit je 5 Tupeln und 1 Segment mit 6 Tupeln.

Für g=5 existieren 2 Gruppen mit je 3 Segmenten, 2 Gruppen mit je 4 Segmenten, 2 Gruppen mit je 5 Segmenten und eine Gruppe mit 6 Segmenten.

Die Konsequenz des Algorithmus

Für jedes Tupel einer Form g sind die Zahlen $z=2^{u_g+g+1}x+T_n$ die einzigen Lösungen der diophantischen Gleichung

$$2y+1=3^{u_g}2x+\frac{3^{u_g}}{2^{u_g+g}}z+\sum_{i=1}^{u_g}\frac{3^{u_g-i}2^{\alpha_i}}{2^{u_g+g}}.$$

Die Zahlen der Folge T_n erhalten wir dann jeweils für x=0.

Wir besitzen mit dem Algorithmus jetzt die Möglichkeit jede weitere Zahl der Folge T_n zu erzeugen, und damit auch die entsprechenden Formen $2^{u_g+g+1}x+T_n$, für die die Collatz-Iteration nach endlich vielen Schritten u_g+g eine größere ungerade Zahl liefert.

Wir erhalten also nicht nur eine einzige unendliche Menge an ungeraden Zahlen, also die Zahlen T_n für x=0, sondern mit jeder weiteren Form für $x \in \mathbb{N}$ auch eine weitere unendliche Menge an ungeraden Zahlen, für die die Collatz-Iteration nach endlich vielen Schritten eine größere ungerade Zahl liefert.

Wir definieren U_n als die Folge aller ungeraden Zahlen, für die die Collatz-Iteration nach endlich vielen Schritten eine größere ungerade Zahl liefert.

Da die Zahlen T_n mit jeder höheren Form nicht nur immer mehr, sondern auch immer größer werden, ist die Konsequenz für die Menge U_n, nach oben hin immer dichter zu werden, sprich einen Grenzwert zu besitzen.

Satz: Sei U_n die Folge aller ungeraden Zahlen, für die die Collatz-Iteration nach endlich vielen Schritten eine größere ungerade Zahl liefert, dann gilt $\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{n}=1+\sqrt{3}$

Eine zweite ganz zentrale Frage

Für welche ungeraden Zahlen liefert die Collatz-Iteration nach endlich vielen Schritten eine **kleinere** ungerade Zahl?

Definition: Bis zum Erreichen einer **kleineren ungeraden** Zahl $a_{u+g} < a_0$ sei u die Anzahl der ausgeführten Iterationsschritte $\frac{3a_n+1}{2}$ für ungerade Zahlen, und g die Anzahl der ausgeführten Iterationsschritte $\frac{a_n}{2}$ für gerade Zahlen.

Wir gehen diese Fragestellung ganz analog zu der auf Seite 2 an. Es gibt allerdings einen wichtigen Unterschied. Diesmal wird die allgemeine Gesetzmäßigkeit von der Folge der **ungeraden** Iterationsschritte bestimmt. Die Anzahl der geraden Iterationsschritte ist dabei nicht eindeutig, sondern variiert in jeder Form von g bis Unendlich je nach gewähltem x Wert.

Satz: Für ungerade Zahlen der Form 4x+1 liefert die Collatz-Iteration nach **mindestens** zwei Schritten (u=1, g≥1) eine kleinere ungerade Zahl der Form 3x+1.

Beweis:

$$\frac{3\cdot(4x+1)+1}{2} = 6x+2 \text{ (gerade)} \Rightarrow \frac{6x+2}{2} = 3x+1 \Rightarrow \text{Fallunterscheidung}$$

$$\text{1. Fall} \Rightarrow 3x+1 \text{ (ungerade für x gerade)} < 4x+1 \text{ für alle } x \in \mathrm{IN}_0$$

$$\text{2. Fall} \Rightarrow 3x+1 \text{ (gerade für x ungerade)} \Rightarrow \text{Division durch 2 bis Ergebnis ungerade} < 4x+1 \text{ für alle } x \in \mathrm{IN}_0$$

Satz: Für ungerade Zahlen der Form 16x+3 liefert die Collatz-Iteration nach **mindestens** vier Schritten (u=2, g≥2) eine kleinere ungerade Zahl.

Beweis:

$$\frac{3\cdot(16x+3)+1}{2} = 24x+5 \text{ (ungerade)} \Rightarrow \frac{3\cdot(24x+5)+1}{2} = 36x+8 \text{ (gerade)} \Rightarrow \frac{36x+8}{2} = 18x+4 \text{ (gerade)}$$

$$\Rightarrow \frac{18x+4}{2} = 9x+2 \Rightarrow \text{Fallunterscheidung}$$

$$\text{1.Fall} \Rightarrow 9x+2 \text{ (ungerade für x ungerade)} < 16x+3 \text{ für alle } x \in \mathrm{IN}_0$$

$$\text{2.Fall} \Rightarrow 9x+2 \text{ (gerade für x gerade)} \Rightarrow \text{Division durch 2 bis Ergebnis ungerade} < 16x+3 \text{ für alle } x \in \mathrm{IN}_0$$

Für dieses Formen-Prinzip des Auffindens der ungeraden Zahlen, für die die Collatz-Iteration nach endlich vielen Schritten eine kleinere ungerade Zahl liefert, scheint ebenfalls eine allgemeine Gesetzmäßigkeit zu existieren. Wir definieren S_n als die Folge der ungeraden Zahlen, für die der folgende Satz gilt.

Satz: Die Collatz-Iteration liefert für ungerade Zahlen der Form $2^{u+g}x+S_n$ nach u ungeraden und **mindestens** g geraden Schritten stets eine kleinere ungerade Zahl der Form

$$3^u x + \frac{3^u}{2^{u+g}} S_n + \sum_{i=1}^{u} \frac{3^{u-i} 2^{\alpha_i}}{2^{u+g}}$$

Der Beweis der allgemeinen Gesetzmäßigkeit verläuft ganz analog zum vorherigen auf Seite 4.

Die ersten Zahlen S_n lauten 1, 3, 11, 23, 7, 15, 59, 39, 79, 95, 123, 175, 199, 219, 287, 347, 367, 423, 507, 575, 583, 735, 815, 923, 975, 999, 231, 383, 463, 615, 879, 935, 1019, 1087, … Referenz: http://oeis.org/A177789

Die Folge der Iterationsschritte u und g

u	g	A(u)	$2^{u+g} \cdot x + S_n$ (Formen)
1	1	1	$2^2 \cdot x + 1$
2	2	1	$2^4 \cdot x + 3$
3	2	2	$2^5 \cdot x + 11, 23$
4	3	3	$2^7 \cdot x + 7, 15, 59$
5	3	7	$2^8 \cdot x + 39, 79, 95, 123, 175, 199, 219$
6	4	12	$2^{10} \cdot x + 287, 347, \ldots , 975, 999$
7	5	30	$2^{12} \cdot x + 231, 383, \ldots , 3911, 4063$
8	5	85	$2^{13} \cdot x + 191, 207, \ldots , 8047, 8103$
9	6	173	$2^{15} \cdot x + 127, 411, \ldots , 32575, 32603$
10	6	476	$2^{16} \cdot x + 359, 479, \ldots , 65275, 65407$
11	7	961	$2^{18} \cdot x + 511, 1023, \ldots , 261679, 262079$
12	8	2652	$2^{20} \cdot x + 239, 487, \ldots , 1047679, 1047967$
13	8	8045	$2^{21} \cdot x + 159, 319, \ldots , 2096667, 2096879$
14	9	17637	$2^{23} \cdot x + 639, 1115, \ldots , 8386415, 8387431$
15	9	51033	$2^{24} \cdot x + 286, 667, \ldots , 16775963, 16776431$
16	10	108950	$2^{26} \cdot x + 991, 1263, \ldots , 67106943, 67107327$
…	…	…	…

Während hier die Zahlen u der Folge der natürlichen Zahlen entsprechen, zeigen die Zahlen g ein eher zufälliges Wachstum, wobei die Differenz benachbarter g Werte nie größer als eins ist. Genau genommen wiederholen sich manche g Werte einmal, andere hingegen nicht. Die Zahlen g sind dabei durch die folgende Formel gegeben.

$$g = \mathrm{ceil}\left(u \cdot \frac{\ln 3}{\ln 2}\right) - u$$

Referenz: http://oeis.org/A020914

Für jede Form u scheinen die Zahlen S_n zwischen 1 und 2^{u+g} chaotisch verteilt zu sein, ihre Tupel folgen jedoch einer strengen Ordnung, die in einen Algorithmus umgesetzt werden kann.

Der Algorithmus zum Erzeugen der Tupel der Form u

Wie zuvor arbeiten wir auch hier wieder mit dem codierten Zähler der Korrektursumme. Allerdings gibt es einen entscheidenden Unterschied zum ersten Algorithmus. Wegen der nicht eindeutigen Anzahl der geraden Iterationsschritte genügt es hier die Tupel einer Form auf die ersten u+1 Elemente zu reduzieren. Der Rest besteht immer nur aus einer verschieden langen Anzahl an Halbierungen. Ein Beispiel wird dies verdeutlichen.

Die Form $2^{u+g}x+S_n$ mit u=3 und g≥2 besitzt genau zwei Formen mit S_n=11 und S_n=23. Die Collatz-Folgen für die Zahlen 11 und 23 bis zum Erreichen einer kleineren ungeraden Zahl lauten 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5 und 23, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5. Die zugehörigen Tupel sind dann 1 1 0 1 0 0 1 und 1 1 1 0 0 0 0 1. Wir erhalten also einmal 7 und einmal 8 Elemente. Doch nur die ersten u+1=4 Elemente sind verschieden. Der Rest besteht nur aus Nullen. Es genügt also mit den Tupeln 1 1 0 1 und 1 1 1 0 zu arbeiten. Angewandt auf die allgemeine Formel sieht das Ganze so aus.

Für 2^5x+11 erhalten wir nach u+1=4 Iterationsschritten die Form $$3^3 x + \frac{3^3}{2^5} \cdot 11 + \frac{3^2 2^0 + 3^1 2^1 + 3^0 2^3}{2^5} = 32x + 10$$

Für 2^5x+23 erhalten wir nach u+1=4 Iterationsschritten die Form $$3^3 x + \frac{3^3}{2^5} \cdot 23 + \frac{3^2 2^0 + 3^1 2^1 + 3^0 2^2}{2^5} = 32x + 20$$

Die Restglieder 10 und 20 führen beide auf die Zahl 5, wenn auch nach verschieden vielen Iterationsschritten.

Satz: Bis zum Erreichen einer kleineren ungeraden Zahl repräsentiert ein u+1 Tupel zur Genüge die Abfolge der ausgeführten Iterationsschritte u und g der entsprechenden Collatz-Iteration einer Zahl S_n.

Im Gegensatz zum ersten Algorithmus besitzen die Tupel der einzelnen Segmente ab u≥5 unterschiedlich viele Einser-Elemente, was in der der Reduktion auf die ersten u+1 Elemente begründet liegt. Um aus einem reduzierten Tupel und der zugehörigen Zahl S_n die kleinere ungerade Vorgängerzahl zu ermitteln, muss die allgemeine Formel von Seite 9 leicht modifiziert werden.

Satz: Die Collatz-Iteration liefert für eine ungerade Zahl der Form $2^{u+g}x+S_n$ und ihr reduziertes Tupel nach u ungeraden und g+h geraden Schritten eine kleinere ungerade Zahl der Form

$$\frac{3^u}{2^h}\cdot x+\mathrm{ceil}\left[\frac{3^u}{2^{u+g+h}}S_n+\sum_{i=1}^{m}\frac{3^{u-i}2^{\alpha_i}}{2^{u+g+h}}\right]$$

mit $g=\mathrm{ceil}\left(u\cdot\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)-u$ erhalten wir dann

$$\frac{3^u}{2^h}\cdot x+\mathrm{ceil}\left[\frac{3^u\cdot S_n+\sum_{i=1}^{m}3^{u-i}2^{\alpha_i}}{2^{\mathrm{ceil}\left(u\cdot\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)+h}}\right]$$

Dabei ist **m** die Anzahl der Einser-Elemente im reduzierten Tupel und **h** die kleinste natürliche Zahl für die der obige Ausdruck ungerade ist. Für m=u ist h=0 und der obige Ausdruck ohne ceil schon ungerade.

Beispiel: S_n=79 für u=5 mit x=0

Die Zahl 79 besitzt das reduzierte Tupel 1 1 1 1 0 0. Das Tupel besitzt m=4 Einser-Elemente. Wir erhalten dann

für h=0
$$\frac{3^5}{2^0}\cdot 0+\mathrm{ceil}\left[\frac{3^5\cdot 79+3^4 2^0+3^3 2^1+3^2 2^2+3^1 2^3}{2^{\mathrm{ceil}\left(5\cdot\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)+0}}\right]=\mathrm{ceil}\left[\frac{243\cdot 79+195}{256}\right]=\mathrm{ceil}(75{,}75)=76$$

für h=1
$$\mathrm{ceil}\left[\frac{75{,}75}{2}\right]=\mathrm{ceil}(37{,}875)=38$$

für h=2
$$\mathrm{ceil}\left[\frac{37{,}875}{2}\right]=\mathrm{ceil}(18{,}9375)=19$$

Die Collatz-Iteration liefert somit für die Zahl 79 nach u+g+h=10 Schritten die kleinere ungerade Zahl 19.

Mit x=1 ergibt sich mit diesem Beispiel schon für h=0 eine kleinere ungerade Zahl.

$$\frac{3^5}{2^0}\cdot 1+\mathrm{ceil}\left[\frac{3^5\cdot 79+3^4 2^0+3^3 2^1+3^2 2^2+3^1 2^3}{2^{\mathrm{ceil}\left(5\cdot\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)+0}}\right]=243+\mathrm{ceil}\left[\frac{243\cdot 79+195}{256}\right]=243+\mathrm{ceil}(75{,}75)=319$$

Die Collatz-Iteration liefert für die Zahl 2^8+79=335 nach u+g+h=8 Schritten die kleinere ungerade Zahl 319.

Die u+1 Tupel der Formen werden sortiert

Auch die u+1 Tupel der Formen $2^{u+g}x+S_n$ lassen sich je Form so sortieren, dass sich die Tupel der weiteren Formen mittels eines Algorithmus erzeugen lassen. Dabei beschränken wir uns wieder auf die Formen mit x=0.

Grundlage für jede Gruppe einer Form u≥4 ist stets eine kleinste Transpositions-Matrix aus drei Zeilen und Spalten mit zwei vorderen Elementen 1 1.

Die türkis unterlegten Tupel definieren wir als die ersten Tupel eines Segments.

	S_n	u+1 Tupel
u=3 (g=2)		
	23	1 1 1 0
	11	1 1 0 1
u=4 (g=3)		
	15	1 1 1 1 0
	7	1 1 1 0 1
	59	1 1 0 1 1
u=5 (g=3)		
	95	1 1 1 1 1 0
	175	1 1 1 1 0 1
	39	1 1 1 0 1 1
	219	1 1 0 1 1 1
	79	1 1 1 1 0 0
	199	1 1 1 0 1 0
	123	1 1 0 1 1 0
u=6 (g=4)		
	575	1 1 1 1 1 1 0
	287	1 1 1 1 1 0 1
	367	1 1 1 1 0 1 1
	999	1 1 1 0 1 1 1
	923	1 1 0 1 1 1 1
	735	1 1 1 1 1 0 0
	815	1 1 1 1 0 1 0
	423	1 1 1 0 1 1 0
	347	1 1 0 1 1 1 0
	975	1 1 1 1 0 0 1
	583	1 1 1 0 1 0 1
	507	1 1 0 1 1 0 1

u=7 (g=5)

383	1 1 1 1 1 1 1 0
2239	1 1 1 1 1 1 0 1
2975	1 1 1 1 1 0 1 1
2031	1 1 1 1 0 1 1 1
615	1 1 1 0 1 1 1 1
2587	1 1 0 1 1 1 1 1

1087	1 1 1 1 1 1 0 0	1855	1 1 1 1 1 1 0 0
1823	1 1 1 1 1 0 1 0	2591	1 1 1 1 1 0 1 0
1647	1 1 1 1 0 1 1 0	879	1 1 1 1 0 1 1 0
3559	1 1 1 0 1 1 1 0	231	1 1 1 0 1 1 1 0
1435	1 1 0 1 1 1 1 0	2203	1 1 0 1 1 1 1 0

4063	1 1 1 1 1 0 0 1	3295	1 1 1 1 1 0 0 1
3119	1 1 1 1 0 1 0 1	2351	1 1 1 1 0 1 0 1
1703	1 1 1 0 1 1 0 1	935	1 1 1 0 1 1 0 1
3675	1 1 0 1 1 1 0 1	2907	1 1 0 1 1 1 0 1

1231	1 1 1 1 0 0 1 1	463	1 1 1 1 0 0 1 1
3143	1 1 1 0 1 0 1 1	3911	1 1 1 0 1 0 1 1
1787	1 1 0 1 1 0 1 1	1019	1 1 0 1 1 0 1 1

Für u≥7 besitzen die Formen mehrere Gruppen, wobei auch Tupel mehrfach auftreten, was in der Reduktion auf die ersten u+1 Elemente begründet liegt.

Die Zusammenhänge zwischen den Gruppen, Segmenten und Tupeln

Bevor wir den Algorithmus beschreiben können, müssen wir zunächst die Zusammenhänge zwischen den Gruppen, Segmenten und Tupeln der einzelnen Formen analysieren. Diese gestallten sich hier etwas komplexer. Daher bedienen wir uns einer tabellarischen Übersicht um diese besser zu verstehen.

			Anzahl der Gruppen mit 3, 4, 5, … Segmenten											Gesamte Anzahl der		
u	g		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Gruppen	Segmente	Tupel
1	1															1
2	2															1
3	2													1	1	2
4	3													1	1	3
5	3													1	2	7
6	4		1											1	3	12
7	5		1	1										2	7	30
8	5		2	2	1									5	19	85
9	6		3	3	2	1								9	37	173
10	6		7	7	5	3	1							23	99	476
11	7		12	12	9	6	3	1						43	194	961
12	8		30	30	23	16	9	4	1					113	525	2652
13	8		85	85	66	47	28	14	5	1				331	1570	8045
14	9		173	173	136	99	62	34	15	5	1			698	3387	17637
15	9		476	476	377	278	179	103	50	20	6	1		1966	9690	51033
16	10		961	961	767	573	379	228	120	55	21	6	1	4072	20423	108950

Wie die Tabelle zu lesen ist, zeigen wir an dem Beispiel für u=10.

Für u=10 mit g=6 existieren 7 Gruppen mit 3 Segmenten, 7 Gruppen mit 4 Segmenten, 5 Gruppen mit 5 Segmenten, 3 Gruppen mit 6 Segmenten und 1 Gruppe mit 7 Segmenten. Insgesamt besitzt diese Form 476 Tupel die sich auf 99 Segmente und 23 Gruppen verteilen.

Algorithmus Teil 1

Zunächst erzeugen wir die Anzahl der Gruppen, Segmente und Tupel für u aus der Anzahl der Gruppen, Segmente und Tupel für u−5. Dazu benutzen wir die Werte der Zeile für u−5 aus der Tabelle.

Die Anzahl der Gruppen mit 3 und 4 Segmenten der Form u entspricht für u<18 immer der Anzahl aller Tupel der Form u−5. (türkis unterlegt)

Die Anzahl der Gruppen mit 5, 6 und 7 Segmenten der Form u ergibt sich aus der Differenz der Anzahl der Gruppen mit 3 bzw. 4 Segmenten der Form u und der Anzahl aller Segmente der Form u−5. (blau unterlegt)

Die Anzahl der Gruppen mit 8, 9 und 10 Segmenten der Form u ergibt sich aus der Differenz der vorigen Differenzen der Gruppen mit 5, 6 und 7 Segmenten der Form u und der Anzahl aller Gruppen der Form u−5. (grün unterlegt)

Die Anzahl der Gruppen mit 11 bis u−3 Segmenten der Form u ergibt sich aus der Differenz der vorigen Differenzen der Gruppen mit 8, 9 und 10 Segmenten der Form u und der Anzahl der Gruppen mit 3 bis u−11 Segmenten der Form u−5. Es kann dann keine weitere Differenz mehr gebildet werden.

Ein Beispiel wird den Algorithmus verdeutlich. Die Differenz zweier Zahlen wird jeweils unter und zwischen diesen Zahlen geschrieben. Man vergleiche die Werte mit der obigen Tabelle.

Zum Erzeugen der Werte für die Zeile u=17 benötigen wir die Werte der Zeile u = 17 − 5 = 12.

u=12 besitzt insgesamt 2652 Tupel und 525 Segmente. Jetzt bilden wir dreimal hintereinander die Differenz.

2652	2652	2127	1602	1077

525 525 525

u=12 besitzt insgesamt 113 Gruppen. Wir bilden wieder dreimal hintereinander die Differenz, allerdings auf der nächsten Ebene.

2652	2652	2127	1602	1077	665	366	180

525 525 525 412 299 186

113 113 113

u=12 besitzt insgesamt 30 Gruppen mit 3 und 4 Segmenten, 23 Gruppen mit 5 Segmenten und 16 Gruppen mit 6 Segmenten. Wir bilden wieder die Differenzen auf der nächsten Ebene.

2652	2652	2127	1602	1077	665	366	180	77	27	7	1

525 525 525 412 299 186 103 50 20 6
113 113 113 83 53 30 14
30 30 23 16

Nun müssen wir noch die Anzahl aller Gruppen, Segmente und Tupel für u=17 berechen.
Die gesamte Anzahl der **Gruppen** für u=17 ist die Summe der oberen Zeile und beträgt 11433.

$$2652 + 2652 + 2127 + 1602 + 1077 + 665 + 366 + 180 + 77 + 27 + 7 + 1 = 11433$$

Die gesamte Anzahl der **Segmente** für u=17 berechet sich ebenfalls aus dieser Summe, wobei jeder Summand zusätzlich mit dem entsprechenden Segment-Faktor multipliziert wird, und beträgt 58040.

$$(3 \cdot 2652) + (4 \cdot 2652) + (5 \cdot 2127) + (6 \cdot 1602) + (7 \cdot 1077) + (8 \cdot 665) + (9 \cdot 366) + (10 \cdot 180) + (11 \cdot 77) + (12 \cdot 27) + (13 \cdot 7) + (14 \cdot 1) = 58040$$

Die gesamte Anzahl der **Tupel** für u=17 berechnet sich mit dem zusätzlichen Tupel-Faktor und beträgt 312455.

Denn eine Gruppe mit n Segmenten besitzt immer $\frac{n(n+5)}{2}$ Tupel, also 3, 7, 12, 18, 25, 33, 42, 52, 63, …

$$(12 \cdot 2652) + (18 \cdot 2652) + (25 \cdot 2127) + (33 \cdot 1602) + (42 \cdot 1077) + (52 \cdot 665) + (63 \cdot 366) + (75 \cdot 180) + (88 \cdot 77) + (102 \cdot 27) + (117 \cdot 7) + (133 \cdot 1) = 312455$$

Somit haben wir alle Werte der Tabellenzeile für u=17 berechet, was es uns ermöglicht, auch die Werte für u = 17 + 5 = 21 zu berechnen, usw.

Ab u=18 wird der Algorithmus etwas komplexer. Es werden zusätzliche Differenzen mit den Werten von u=12 gebildet.

$8045-2652 = 5395$ $1570-525 = 1045$ $331-113 = 218$ $85-30 = 55$

5393	5393	4348	3303	2258	1431	822	431	203	83	28	7	1

1045 1045 1045 827 609 391 228 120 55 21 6
218 218 218 163 108 65 34 15
55 55 43 31 19

Ab u=30 werden wieder zusätzliche Differenzen benötigt. Eine vollständige Beschreibung des Algorithmus kann an dieser Stelle also noch nicht gegeben werden. Der Algorithmus scheint jedoch nur mit bereits erzeugten Werten zu arbeiten.

Algorithmus Teil 2

Jetzt muss noch die genaue Beschaffenheit der Tupel von u geklärt werden.

Jede Form u≥4 besitzt immer eine größte Gruppe mit u−3 Segmenten. (siehe Tabelle, grau unterlegt)

Die Tupel der ersten Segmente einer Gruppe von u werden aus den jeweils ersten Tupel der Segmente der größten Gruppe der Form u−3 gebildet. Dabei bilden die Transpositions-Matrix und die hinteren Elemente dieser Tupel von u−3 die hinteren Elemente der Tupel von u.

Die vorderen fünf Elemente der neuen Tupel sind immer die kleinste Transpositions-Matrix aus drei Zeilen und Spalten mit zwei vorderen Elementen 1 1.

1 1 1 1 0
1 1 1 0 1
1 1 0 1 1

Die Verteilung der Tupel von u−3 auf die neuen Gruppen von u funktioniert dabei nach folgendem Prinzip.
Das erste Tupel des n-ten Segments der größten Gruppe von u−3 ist Grundlage aller Gruppen von u mit n+2 Segmenten. Die größte Gruppe von u basiert auf dem gleichen Tupel wie das der zweitgrößten Gruppen. (vgl. Tabelle Seite 12)

Die Konstruktion der höheren Segmente der Gruppen funktioniert ähnlich wie beim ersten Algorithmus. Die weiteren Tupel der höheren Segmente von u werden gebildet indem die Transpositions-Matrix um eine Spalte und Zeile erweitert wird, wobei die angrenzende Null die hinteren Einsen ersetzt. Dieser Vorgang dauert so lange an, bis die Null das letzte Element der Tupel bildet oder an eine weitere Null grenzt.

Die größte Gruppe einer Form besitzt als einzige Gruppe ein zusätzliches Segment, das nur aus einer Transpositions-Matrix und den vorderen Elementen 1 1 besteht.

Durch den ersten Teil des Algorithmus ist aber auch die Anzahl der Segmente der neuen Gruppen bekannt.
Ein erstes Beispiel soll uns die Form u=7 geben.

u=7 (g=5)

383	1 1 1 1 1 1 1 0			
2239	1 1 1 1 1 1 0 1			
2975	1 1 1 1 1 0 1 1			
2031	1 1 1 1 0 1 1 1			
615	1 1 1 0 1 1 1 1			
2587	1 1 0 1 1 1 1 1			
1087	1 1 1 1 1 1 0 0	1855	1 1 1 1 1 1 0 0	
1823	1 1 1 1 1 0 1 0	2591	1 1 1 1 1 0 1 0	
1647	1 1 1 1 0 1 1 0	879	1 1 1 1 0 1 1 0	
3559	1 1 1 0 1 1 1 0	231	1 1 1 0 1 1 1 0	
1435	1 1 0 1 1 1 1 0	2203	1 1 0 1 1 1 1 0	
4063	1 1 1 1 1 0 0 1	3295	1 1 1 1 1 0 0 1	
3119	1 1 1 1 0 1 0 1	2351	1 1 1 1 0 1 0 1	
1703	1 1 1 0 1 1 0 1	935	1 1 1 0 1 1 0 1	
3675	1 1 0 1 1 1 0 1	2907	1 1 0 1 1 1 0 1	
1231	1 1 1 1 0 0 1 1	463	1 1 1 1 0 0 1 1	
3143	1 1 1 0 1 0 1 1	3911	1 1 1 0 1 0 1 1	
1787	1 1 0 1 1 0 1 1	1019	1 1 0 1 1 0 1 1	
59	1 1 0 1 1	59	1 1 0 1 1	Tupel von u=4

Die Form u=4 besitzt nur eine Gruppe mit einem Segment (vgl. Seite 12). Das erste Tupel dieses Segments (59) bildet die Grundlage für die zwei Gruppen der Form u=7. Die ersten fünf Elemente der neuen Segmente sind gegeben durch 1 1 0 1 1, und werden von der Transpositions-Matrix 0 1 1 und den hinteren Elementen (hier nicht vorhanden) der Tupel von u=4 ergänzt.

			Anzahl der Gruppen mit 3, 4, 5, … Segmenten											Gesamte Anzahl der		
u	g		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Gruppen	Segmente	Tupel
4	3													1	1	3
5	3													1	2	7
6	4		1											1	3	12
7	5		1	1										2	7	30
8	5		2	2	1									5	19	85
9	6		3	3	2	1								9	37	173
10	6		7	7	5	3	1							23	99	476

Die türkis gekennzeichneten Tupel von u=7 sind dann die Basis für die 23 Gruppen von u=10.

Das Tupel 1787 bildet die Grundlage für 7 Gruppen mit 3 Segmenten.
Das Tupel 3675 bildet die Grundlage für 7 Gruppen mit 3 Segmenten.
Das Tupel 1435 bildet die Grundlage für 5 Gruppen mit 4 Segmenten
Das Tupel 2587 bildet die Grundlage für 3 Gruppen mit 6 Segmenten und die größte Gruppe mit 7 Segmenten.

Wir wollen als Beispiel eine der 7 Gruppen mit 3 Segmenten von u=10 bilden, wobei die weiteren 6 Gruppen die gleichen Tupel besitzen.

u=10 (g=6)

1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1
1 1 1 1 1 0 1 0 0 1 1
1 1 1 1 0 1 1 0 0 1 1
1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1
1 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1

1 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1
1 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1
1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1
1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1

1 1 1 1 0 0 1 1 0 1 1
1 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1
1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1

1787 1 1 0 1 1 0 1 1 Tupel von u=7

Weitere Beispiele der Tupelbildung geben die Formen u=5 und u=6 (siehe Seite 12).

Zusammenfassung des Algorithmus

Mit Teil 1 des Algorithmus lässt sich also aus der Form u−5 die genaue Anzahl der Gruppen, Segmente und Tupel für die Form u berechnen.

Mit Teil 2 des Algorithmus lassen sich dann aus der Form u−3 die Tupel für u konstruieren.

Mit fünf aufeinander folgenden Formen lassen sich so alle weiteren Gruppen, Segmente und Tupel aller weiteren Formen konstruieren.

Wie erzeugt man aus einem u+1 Tupel die entsprechende Zahl S_n?

Sonderfall m=u

Für Tupel mit m=u sind die Zahlen $z = 2^{u+g} \cdot x + S_n$ die einzigen Lösungen der diophantischen Gleichung

$$2y+1 = 3^u \cdot x + \frac{3^u \cdot z + \sum_{i=1}^{u} 3^{u-i} 2^{\alpha_i}}{2^{\mathrm{ceil}\left(u \cdot \frac{\ln 3}{\ln 2}\right)}}$$

Die Zahlen der Folge S_n erhalten wir dann jeweils für x=0.

Andere Fälle m<u

Hierbei ist vor allem zu berücksichtigen, dass für u≥7 reduzierte Tupel mehrfach auftreten.

*Eingrenzen der möglichen Lösungen für S_n

Satz: Die ersten Stellen aufeinanderfolgender Einsen eines Tupels entsprechen immer den letzten Stellen aufeinanderfolgender Einsen der Binärdarstellung der entsprechenden Zahl S_n.

Beispiele:	S_n=175	1 0 1 $\underline{0\ 1\ 1\ 1\ 1}$	(Binär)	$\underline{1\ 1\ 1\ 1\ 0}$ 1	(Tupel)
	S_n=199	1 1 0 0 $\underline{0\ 1\ 1\ 1}$	(Binär)	$\underline{1\ 1\ 1\ 0}$ 1 0	(Tupel)
	S_n=219	1 1 0 1 1 $\underline{0\ 1\ 1}$	(Binär)	$\underline{1\ 1\ 0}$ 1 1 1	(Tupel)

Wegen $1 > S_n > 2^{u+g}$ kann die Binärdarstellung einer Zahl S_n höchstens $u+g-1$ Stellen besitzen.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Gesetzmäßigkeiten

Vergleichen wir abschließend die beiden Tabellen für die Formen S_n und T_n.

S_n					T_n			
u	g	A(u)	$2^{u+g} \cdot x + S_n$		g	u	A(g)	$2^{u+g+1} \cdot x + T_n$
1	1	1	$2^2 \cdot x + 1$		0	1	1	$2^2 \cdot x + 3$
2	2	1	$2^4 \cdot x + 3$		1	2	1	$2^4 \cdot x + 9$
3	2	2	$2^5 \cdot x + 11, 23$					
4	3	3	$2^7 \cdot x + 7, 15, \ldots$		2	4	2	$2^7 \cdot x + 97, 125$
5	3	7	$2^8 \cdot x + 39, 79, \ldots$					
6	4	12	$2^{10} \cdot x + 287, 347, \ldots$		3	6	7	$2^{10} \cdot x + 109, 161, \ldots$
7	5	30	$2^{12} \cdot x + 231, 383, \ldots$		4	7	30	$2^{12} \cdot x + 145, 365, \ldots$
8	5	85	$2^{13} \cdot x + 191, 207, \ldots$					
9	6	173	$2^{15} \cdot x + 127, 411, \ldots$		5	9	113	$2^{15} \cdot x + 129, 189, \ldots$
10	6	476	$2^{16} \cdot x + 359, 479, \ldots$					
11	7	961	$2^{18} \cdot x + 511, 1023, \ldots$		6	11	526	$2^{18} \cdot x + 165, 285, \ldots$
12	8	2652	$2^{20} \cdot x + 239, 487, \ldots$		7	12	2652	$2^{20} \cdot x + 221, 573, \ldots$
13	8	8045	$2^{21} \cdot x + 159, 319, \ldots$					
14	9	17637	$2^{23} \cdot x + 639, 1115, \ldots$		8	14	11433	$2^{23} \cdot x + 193, 333, \ldots$
15	9	51033	$2^{24} \cdot x + 286, 667, \ldots$					
16	10	108950	$2^{26} \cdot x + 991, 1263, \ldots$		9	16	58040	$2^{26} \cdot x + 293, 437, \ldots$
17	10	312455	$2^{27} \cdot x +$					
18	11	663535	$2^{29} \cdot x +$		10	18		$2^{28} \cdot x +$
19	12	1900470	$2^{31} \cdot x +$		11	19		$2^{30} \cdot x +$
20	12	5936673	$2^{32} \cdot x +$					
21	13	13472296	$2^{34} \cdot x +$		12	21		$2^{33} \cdot x +$
22	13	39993895	$2^{35} \cdot x +$					
23	14	87986917	$2^{37} \cdot x +$		13	23		$2^{36} \cdot x +$
24	15	257978502	$2^{39} \cdot x +$		14	24		$2^{38} \cdot x +$
25	15	820236724	$2^{40} \cdot x +$					
26	16	1899474678	$2^{42} \cdot x +$		15	26		$2^{41} \cdot x +$
27	16	5723030586	$2^{43} \cdot x +$					
28	17	12809477536	$2^{45} \cdot x +$		16	28		$2^{44} \cdot x +$
29	17	38036848410	$2^{46} \cdot x +$					
30	18	84141805077	$2^{48} \cdot x +$		17	30		$2^{47} \cdot x +$

Es gibt für S_n Formen mit Zweierpotenzen, die es für T_n nicht gibt, wie zum Beispiel 2^5, 2^8 oder 2^{13}, … (hellgrün unterlegt). Die zu diesen Formen gehörenden u Werte 3, 5, 8, …, sind genau die u Werte, die in der Folge der u Werte der Formen für T_n fehlen (dunkelgrün unterlegt). Anders herum sind es für S_n genau die u Werte für die sich g wiederholt. So besitzen zum Beispiel u=2 und u=3 beide den Wert g=2.

Da die Folge der g Werte für S_n eine Formel liefert, können wir so indirekt auch die Folge der u Werte für T_n konstruieren.

Wir erhalten somit ein vollständig abgeschlossenes System der Collatz-Iteration zum Erzeugen von größeren und kleineren Zahlen.

Die Konsequenz des zweiten Algorithmus

Wenn die Collatz-Iteration für jede ungerade Zahl $c \geq 1$ nach endlich vielen Schritten eine kleinere ungerade Zahl $c' < c$ liefert, dann muss sie auch für diese kleinere Zahl c' nach endlich vielen Schritten eine noch kleinere ungerade Zahl $c'' < c'$ liefern. Die Collatz-Iteration würde somit für alle positiven ungeraden Zahlen bei 1 enden.

Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Formen $2^{u+g} \cdot x + S_n$ die Menge der positiven ungeraden Zahlen erfassen.

Analog zum letzten Abschnitt auf Seite 8, führt auch der zweite Algorithmus auf einen Grenzwert.

Wir definieren W_n als die Folge aller ungeraden Zahlen, für die die Collatz-Iteration nach endlich vielen Schritten eine kleinere ungerade Zahl liefert.

Da die Zahlen S_n mit jeder höheren Form nicht nur immer mehr, sondern auch immer größer werden, ist die Konsequenz für die Menge W_n, nach oben hin immer dichter zu werden, sprich einen Grenzwert zu besitzen.

Satz: Sei W_n die Folge aller ungeraden Zahlen, für die die Collatz-Iteration nach endlich vielen Schritten eine kleinere ungerade Zahl liefert, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{W_n}{n} = 2$

Die Menge W_n ist also dichter bzw. mächtiger als die Menge U_n, und der Grenzwert von 2 bedeutet nichts anderes, als dass W_n die Menge der positiven ungeraden Zahlen ist.

Der zweiter Algorithmus ermöglicht uns die Konstruktion aller Formen $2^{u+g} \cdot x + S_n$ und damit auch die Konstruktion der Menge W_n.

Somit muss die Collatz-Iteration für jede positive ungerade Zahl bei 1 enden.

Mike Winkler, Oer-Erkenschwick, den 27.10.2010

*aktualisiert am 13.02.2011