

Die Selbstähnlichkeit der Baumstruktur

30.06.2010
von Mike Winkler

Wo und wie oft finden sich in der Baumstruktur Kopien der Anordnung der Nachbarschafts-Teilgraphen des Baumstrukturbeginns?

Die Tabelle gibt eine Übersicht über die jeweils ersten Kopien. Die ungerade Zahl a entspricht dabei der Position der 1. Je kleiner der Anfangsbereich der Struktur ist, desto mehr Kopien finden sich natürlich in der Baumstruktur. Die Struktur der Teilgraphen bis Spalte S_1 findet sich erstmals in Spalte S_3 und Zeile Z_5 mit der 19.

Struktur	a (Position der 1)	x von $a = 6x+1$	(S, Z)	log a
S_0 bis S_0	1	0	(0, 0)	0
S_0 bis S_1	19	3	(3, 5)	2.94
S_0 bis S_2	1459	3^5	(7, 8)	7.29
S_0 bis S_3	118213	$3^9 + 19$	(12, 12)	11.68
S_0 bis S_4	3188713	$3^{12} + 11$	(14, 14)	14.98
S_0 bis S_5	188286357655	3^{22}	(20, 20)	25.96

Erstaunlicher Weise besteht der x -Wert von a fast ausschließlich aus reinen 3er Potenzen. Spalten- und Zeilenzahl sind fast immer gleich und entsprechen ungefähr dem natürlichen Logarithmus von a .

Eine weitere Besonderheit ist, dass zu jeder Struktur-Kopie beginnend mit der ungeraden Zahl a immer eine weitere beginnend mit der ungeraden Zahl $2a-1$ und den gleichen Baum-Koordinaten existiert.

Die Zahl, welche in der Struktur-Kopie jeweils an der Position der 9 liegt, steht in einem besonderen Verhältnis zur Zahl an der Position der 1. Durch die Teilgraphen-Formen $6x+1$ und $24x+9$ ausgedrückt gilt:

$$6 \cdot (3^n + p) + 1 \quad \text{und} \quad 24 \cdot (2^9 \cdot 3^{n-5} \cdot p) + 9$$

Für den x -Wert gilt: p ist Null oder Primzahl. Gilt $p=0$ im ersten Term, gilt $p=1$ im zweiten Term.

Struktur	a (Position der 9)	x von $a = 24x+9$	(S, Z)	log a
S_0 bis S_2	12297	$2^9 \cdot 3^0$	(9, 13)	9.42
S_0 bis S_3	18911241	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 19$	(14, 17)	16.76
S_0 bis S_4	295612425	$2^9 \cdot 3^7 \cdot 11$	(16, 19)	19.06
S_0 bis S_5	1586874322953	$2^9 \cdot 3^{17}$	(22, 25)	28.10

Dieses Verhältnis kann man sich für einen sehr schnellen und effektiven Suchalgorithmus zu Nutze machen. Auf diese Weise wurden vier Kopien des großen Zusammenhangs von S_0 bis S_5 innerhalb weniger Minuten gefunden, da der x -Wert immer Potenzen der Primfaktoren 2 und 3 besitzt.