Über die Struktur und das Wachstumsverhalten von Collatz 3n + 1 Folgen

Mike Winkler

04.03.2014

Zusammenfassung

Die zahlentheoretische Funktion $T(n) = \frac{n}{2}$ für gerade n und $T(n) = \frac{3n+1}{2}$ für ungerade n generiert für jede Startzahl $s \in \mathbb{N}$ eine Collatz-Folge $C(s) = \left(T^k(s)_{k=0}^{\infty}\right), T^0(s) = s, T^k(s) = T\left(T^{k-1}(s)\right)$. Eine $C(s)$ kann nur zwei mögliche Formen annehmen. Entweder sie gerät in einen Zyklus oder sie wächst ins Unendliche. Das kleinste k für das $T^k(s) < s$ gilt, nennt man die Stoppzeit von s. Es wird gezeigt, dass jede $C(s)$ aus gleich strukturierten Teilfolgen $C^t(s) = \left(T^k(s)_{k=0}^{t}\right)$ für Startzahlen $s \equiv 3, 7 \, mod \, 12$ bzw. $C^h(s) = \left(T^k(s)_{k=0}^{h}\right)$ für Startzahlen $s \equiv 9 \, mod \, 12$ zusammengesetzt ist. Die Struktur und statistische Verteilung der Teilfolgen $C^t(s)$ und $C^h(s)$ lässt sich bezogen auf ihre Länge und Stoppzeit algorithmisch exakt erfassen und beschreiben, u.a. mit Hilfe der Fibonacci-Folge. In Kombination mit dem Nachweis einer asymptotischen Dichte der $C^t(s)$ mit endlicher Stoppzeit lässt sich folgern, dass eine $C(s)$ mit unendlichem Wachstum nicht existieren kann.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Schaut man sich die Entwicklung verschiedener Collatz-Folgen an, so gewinnt man schnell den Eindruck, dass hier pures Chaos am Werk ist. Ein Eindruck, der nicht täuscht. Günther Wirsching, ein internationaler Experte für dieses Thema, schreibt dazu: "Die mathematischen Schwierigkeiten bei der Untersuchung der Dynamik von 3n + 1 Iterationen scheinen damit zusammenzuhängen, dass wir es mit einem deterministischen Prozess zu tun haben, der stochastisches Verhalten simuliert. Das verbindet die Sache mit der mathematischen Behandlung des Chaos."[8]

Indem man eine Collatz-Folge in *endliche Teilfolgen* unterteilt kann man ein wenig Ordnung in ihr dynamisches Verhalten bringen.

Soll eine Collatz-Folge *unendlich* wachsen, muss sie irgendwann auf eine Zahl der Restklasse 3 mod 4 treffen. Von dort an besteht sie nur noch aus endlichen Teilfolgen mit Startzahlen der Restklassen 3,7 mod 12. Nimmt man jetzt eine Liste dieser Teilfolgen, dann muss die unendlich wachsende Collatz-Folge die Teilfolgen dieser Liste durchlaufen - nicht alle, aber jede nur einmal. Das geschieht in der Regel chaotisch, sie springt also mal vor und zurück. Doch tendenziell wird sie sich immer weiter nach oben durch die Liste entwickeln.

Nun lässt sich folgendes zeigen: Die Teilfolgen dieser Liste sind ihrer Länge (Gliederzahl) nach *nicht* chaotisch verteilt, sondern folgen einem strengen Muster basierend auf der *Fibonacci-Folge*. Statistisch besitzen *zwei von drei* dieser Teilfolgen endliche Stoppzeit (Stoppzeitfolgen). Dies führt dazu, dass jede Collatz-Folge irgendwann eine Serie dicht aufeinanderfolgender längerer Stoppzeitfolgen durchlaufen muss, was ihr Wachstum schließlich zusammenbrechen lässt.

Das eine Collatz-Folge nicht endlos wachsen kann ist jedoch noch kein Beleg dafür, dass sie *immer* in dem Zyklus (2,1) endet. Es besteht weiterhin die Möglichkeit der Existenz *mindestens* eines weiteren Zyklus, welcher nach heutigem Kenntnisstand aus vielen Milliarden Zahlen bestehen müsste.[5]

2 Die Collatz 3n + 1 Funktion

Die Collatz $3n+1$ Funktion sei definiert als eine Abbildung $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$T(n) := \begin{cases} T_0 := \dfrac{n}{2} & \text{für gerade} \quad n, \\[2ex] T_1 := \dfrac{3n+1}{2} & \text{für ungerade} \quad n. \end{cases}$$

Sei $T^0(s) = s$ und $T^k(s) = T\left(T^{k-1}(s)\right)$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann ist die Collatz-Folge für $s \in \mathbb{N}$ gegeben durch $C(s) = \left(T^k(s) \mid k = 0, 1, 2, 3, \dots\right)$.

Zum Beispiel ergibt die Startzahl $s = 11$ die Collatz-Folge

$$C(11) = (11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots).$$

Eine C(s) kann nur zwei mögliche Formen annehmen. Entweder sie gerät in einen Zyklus oder sie wächst ins Unendliche. Die bisher unbewiesene Vermutung zu diesem Problem ist die Aussage des folgenden Satzes.

Satz 1: Für jede Startzahl $s \in \mathbb{N}$ gerät $C(s)$ in den Zyklus $(2, 1)$.

3 Die Restklassen modulo 2^n

Lemma 1: Für alle $T^k(s) \equiv 0 \, mod \, 2$ gilt $T^{k+1}(s) < T^k(s)$.

Beweis: Für $T^k(s) = 2x$ mit $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$ gilt

$$T^{k+1}(s) = \frac{2x}{2} = x < T^k(s) = 2x.$$

$\square$

Lemma 2: Für alle $T^k(s) \equiv 1 \, mod \, 4$ gilt $T^{k+2}(s) < T^k(s)$ mit $T^{k+2}(s) \equiv 1 \, mod \, 3$.

Beweis: Für $T^k(s) = 4x + 1$ mit $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$ gilt

$$T^{k+1}(s) = \frac{3(4x+1)+1}{2} = \frac{12x+4}{2} = 6x + 2.$$

$$T^{k+2}(s) = \frac{6x+2}{2} = 3x + 1 < T^k(s) = 4x + 1.$$

$\square$

Lemma 3: Für alle $T^k(s) \equiv 6 \, mod \, 8$ gilt $T^{k+1}(s) < T^k(s)$ mit $T^{k+1}(s) \equiv 3 \, mod \, 4$.

Beweis: Für $T^k(s) = 8x + 6$ mit $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ gilt

$$T^{k+1}(s) = \frac{8x+6}{2} = 4x + 3 < T^k(s) = 8x + 6.$$

$\square$

Lemma 4: Für alle $T^k(s) = 2^n$ wird in $C(s)$ nach n Iterationsschritten die Zahl 1 erreicht.

Beweis: Für $T^k(s) = 2^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$T^{k+1}(s) = \frac{2n}{2} = 2^{n-1}.$$

Da mit jedem weiteren Iterationsschritt immer eine gerade Zahl erzeugt wird, gilt nach n Iterationsschritten

$$T^{k+n}(s) = 2^{n-n} = 1.$$

□

Lemma 5: Für alle $T^k(s) \equiv (2^n - 1) \, mod \, 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt $T^{k+1}(s) \equiv (2^{n-1} - 1) \, mod \, 2^n$.

Beweis: Für $T^k(s) = 2^{n+1}x + 2^n - 1$ mit $x, n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$, $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} T^{k+1}(s) &= \frac{3(2^{n+1}x + 2^n - 1) + 1}{2} &&= \frac{3 \cdot 2^{n+1}x + 3(2^n - 1) + 1}{2} \\ &= \frac{3 \cdot 2^{n+1}x + 3 \cdot 2^n - 2}{2} &&= \frac{3 \cdot 2^{n+1}x + (2+1) \cdot 2^n - 2}{2} \\ &= \frac{3 \cdot 2^{n+1}x + 2^{n+1} + 2^n - 2}{2} = 3 \cdot 2^n x + 2^n + 2^{n-1} - 1 \\ &= 2^n(3x + 1) + 2^{n-1} - 1. \end{aligned}$$

□

Lemma 6: $C(s)$ besitzt für alle $T^k(s) \equiv (2^n - 1) \, mod \, 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ein $T^{n-1}(s) \equiv 1 \, mod \, 4$.

Beweis: Gemäß Lemma 5 führt eine Zahl $s \in \mathbb{N}$ der Restklasse $[2^n - 1]_{2^{n+1}}$ in $C(s)$ nach dem ersten Iterationsschritt auf eine Zahl der Restklasse $[2^{n-1} - 1]_{2^n}$. Durch Induktion über n folgt dann, dass nach insgesamt $n - 1$ Iterationsschritten eine Zahl der Restklasse $[2^{n-(n-1)} - 1]_{2^{n+1-(n-1)}} = [1]_4$ erreicht wird. □

Lemma 7: Für alle $s \in \mathbb{N}$ ist die Vereinigung der Mengen $\{s \equiv (2^n - 1) \, mod \, 2^{n+1}\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gleich der Menge $\{s \equiv 3 \, mod \, 4\}$. □

Lemma 8: Von allen $T^k(s) \equiv 3\,mod\,4$ besitzen nur die Zahlen der Restklasse $[11]_{12}$ in $C(s)$ ein $T^{k-1}(s) \equiv 3\,mod\,4 < T^k(s) \equiv 3\,mod\,4$.

Beweis: Für $T^k(s) = 4x + 3$ mit $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ gilt

$$T^{k-1}(s)\frac{2(4x+3)-1}{3} = \frac{8x+5}{3} < 4x+3.$$

□

4 Endliche Teilfolgen

4.1 Die Teilfolgen $C^t(s)$ der Restklassen $3, 7\,mod\,12$

Sei $C^a(s) = \big(T^k(s) \mid k = 0, \ldots, a\big)$ mit $a \geq 1$ eine Teilfolge von $C(s)$, dann gelten für die globalen Extremstellen in $C^a(s)$ die folgenden Termini. $T^{min_u}(s)$ ist ungerades Minimum, $T^{min_g}(s)$ ist gerades Minimum, $T^{max_u}(s)$ ist ungerades Maximum und $T^{max_g}(s)$ ist gerades Maximum.

Definition: Für alle $s \equiv 3, 7\,mod\,12$ sei $C^t(s) = \big(T^k(s) \mid k = 0, \ldots, t\big)$ mit $t \geq 2$ eine Teilfolge von $C(s)$ der Form

$$C^t(s) = \big(T^0(s), \ldots, T^{max_u}(s), T^{max_g}(s), \ldots, T^t(s)\big)\,.$$

Dabei gilt für alle $C^t(s)$: $T^0(s), \ldots, T^{max_u}(s), T^{max_g}(s)$ mit $T^0(s) \equiv 3, 7\,mod\,12$, $T^1(s), \ldots, T^{max_u - 1}(s) \equiv 3\,mod\,4$, $T^{max_u}(s) \equiv 1\,mod\,4$. Der weitere Verlauf ist, abhängig von s, verschieden für jede Teilfolge. Im kürzesten Fall gilt $T^t(s) = T^{max_g}(s) \equiv 6\,mod\,8$. Im längsten Fall gilt $T^{max_g}(s) \equiv 2\,mod\,6$, $T^{max_g + 1}(s), \ldots, T^{t-1}(s) \equiv 1\,mod\,4$ oder $0, 2, 4\,mod\,8$ und $T^t(s) = T^{min_g}(s) \equiv 6\,mod\,8$ oder $T^t(s) = T^{min_u}(s) = 1$. Der weitere Verlauf wird somit durch die Restklasse $[6]_8$ oder der 1 begrenzt. (*Definition Ende*)

Im folgenden Satz 2 wird der längst mögliche Fall einer $C^t(s)$ behandelt und bewiesen. Alle kürzeren Fälle sind in diesem enthalten.

Satz 2: $C^t(s)$ ist streng monoton wachsend bis zum Erreichen eines Maximums $T^{max_u}(s), T^{max_g}(s)$. Danach streng monoton fallend (für gerade und ungerade Zahlen separat) bis zum Erreichen eines Minimums $T^t(s)$. Dabei sei $C^{t_A}(s)$ die Teilfolge mit $T^{min_g}(s) \equiv 6\,mod\,8$, und $C^{t_B}(s)$ die Teilfolge mit $T^{min_u}(s) = 1$.

Die Teilfolgen besitzen die grob strukturierte Restklassenentwicklung

$$C^{t_A}(s) = ([3,7]_{12}, \ldots, [3]_8, [1]_4, [2]_6, \ldots, [6]_8)\,,$$

$$C^{t_B}(s) = ([3,7]_{12}, \ldots, [3]_8, [1]_4, [2]_6, \ldots, [0]_{2^n}, \ldots, 1)\,.$$

Beweis: Es gilt $[3]_4 = [3]_{12} \sqcup [7]_{12} \sqcup [11]_{12}$. Gemäß Lemma 8 sind somit die Zahlen s der Restklassen $[3]_{12}$ und $[7]_{12}$ genau die Zahlen der Restklasse $[3]_4$ die in $C(s)$ keine kleinere Vorgängerzahl der Restklasse $[3]_4$ besitzen. Aus Lemma 5 und 6 folgt, unter Gebrauch von Lemma 7, dass $C(s)$ für eine Zahl der Restklasse $[3]_4$ streng monoton wächst, dabei nur Zahlen der Restklasse $[3]_4$ durchläuft, bis ein ungerades Maximum der Restklasse $[1]_4$ erreicht wird. Darauf folgt nach Lemma 2 ein gerades Maximum der Restklasse $[2]_6$. Diesem folgen dann gemäß Lemma 1 und 2 nur noch Zahlen der Restklassen $[1]_4$ und $[0, 2, 4]_8$, gerade und ungerade Zahlen für sich streng monoton fallend, bis zum Erreichen eines geraden Minimums der Restklasse $[6]_8$ oder des ungeraden Mini- mums 1. Die Zahl 1 wird genau dann erreicht, wenn gemäß Lemma 4 unter den Restklassen $[0, 2, 4]_8$ eine Zweierpotenz ist. Auf eine Zahl der Restklasse $[6]_8$ folgt gemäß Lemma 3 eine kleinere ungerade Zahl der Restklasse $[3]_4$. $\square$

Beispiel: Eine kürzeste Teilfolge $C^{t_A}(s)$ ist $C^{2_A}(27) = (27, 41, 62)$. Eine längere Teilfolge $C^{t_A}(s)$ ist $C^{7_A}(31) = (31, 47, 71, 107, 161, 242, 121, 182)$. Eine Teilfolge $C^{t_B}(s)$ ist $C^{11_B}(15) = (15, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1)$.

Anhang 1 zeigt eine Liste der ersten Teilfolgen $C^t(s)$.

4.2 Die Teilfolgen $C^h(s)$ der Restklasse $9\,mod\,12$

Definition: Für alle $s \equiv 9\,mod\,12$ sei $C^h(s) = \big(T^k(s) \mid k = 0, \ldots, h\big)$ mit $h \geq 1$ eine Teilfolge von $C(s)$ der Form

$$C^h(s) = \big(T^{max_u}(s), T^{max_g}(s), \ldots, T^{min_u}(s)\big)\,.$$

Dabei gilt $T^{max_u}(s) = T^0(s) \equiv 9\,mod\,12$, $T^1(s), \ldots, T^{min_u - 1}(s) \equiv 1\,mod\,4$ oder $0\,mod\,2$ und $T^{min_u}(s) = T^h(s) \equiv 3\,mod\,4$ oder 1. (*Definition Ende*)

Satz 3: $C^h(s)$ ist streng monoton fallend (für gerade und ungerade Zahlen separat) und besitzt ein ungerades Minimum $T^{min_u}(s)$. Dabei sei $C^{h_A}(s)$ die Teilfolge mit $T^{min_u}(s) \equiv 3\,mod\,4$, und $C^{h_B}(s)$ die Teilfolge mit $T^{min_u}(s) = 1$. $\square$

Beispiel: Eine kürzeste Teilfolge $C^{h_A}(s)$ ist $C^{2_A}(9) = (9, 14, 7)$. Eine längere Teilfolge $C^{h_A}(s)$ ist $C^{6_A}(129) = (129, 194, 97, 146, 73, 110, 55)$. Eine Teilfolge $C^{t_B}(s)$ ist $C^{12_B}(45) = (45, 68, 34, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1)$.

Anhang 2 zeigt eine Liste der ersten Teilfolgen $C^h(s)$.

5 Anzahl der Folgenglieder

5.1 Die Anzahl der Folgenglieder der $C^h(s)$

Das wiederholte Auftreten einer Teilfolge $C^{h_A}(s)$ gleicher Länge folgt einem periodischen Muster, welches sich ab dem ersten oder zweiten Auftreten einstellt. Dabei wird die Periode, welche durch eine Zweierpotenz gegeben ist, mit zunehmender Länge h von immer mehr kleineren Teilperioden gebildet.

Beispiel: Die Teilfolge mit 6 Gliedern ($h = 5$) für das *kleinste* $s \equiv 3, 7 \, mod \, 12$ ist $C^5(81) = (81, 122, 61, 92, 46, 23)$. Nun folgen immer im Abstand von 3, 10 und 19 weitere Teilfolgen mit 6 Gliedern.

Sei $s = 12x + 9$ mit $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ gegeben, dann ist die Teilfolge für $x = 6$, $C^5(81) = (81, 122, 61, 92, 46, 23)$, die erste Folge die 6 Glieder besitzt. Die nächsten Teilfolgen mit 6 Gliedern finden sich dann für $x = 6 + 3 = 9$, $x = 9 + 10 = 19$, $x = 19 + 19 = 38$, $x = 38 + 3 = 41$, $x = 41 + 10 = 51$, usw. Der jeweils nächste x-Wert bildet sich also periodisch durch wiederholte Addition von 3, 10 und 19 zum vorherigen x-Wert. Zum Vergleich siehe Anhang 2.

Wir sagen: $C^h(s)$ besitzt für $h = 5$ die Periode 32 bestehend aus den Teilperioden 3, 10 und 19, und schreiben hierfür verkürzt: $h = 5$ mit $32 \, \{3, 10, 19\}$. Es ist dann

$h = 2$ mit $4 \, \{4\}$,
$h = 3$ mit $8 \, \{8\}$,
$h = 4$ mit $16 \, \{11, 5\}$,
$h = 5$ mit $32 \, \{3, 10, 19\}$,
$h = 6$ mit $64 \, \{17, 6, 13, 7, 21\}$,
$h = 7$ mit $128 \, \{19, 15, 12, 26, 14, 1, 4, 37\}$,
$h = 8$ mit $256 \, \{11, 17, 7, 41, 11, 28, 2, 8, 11, 8, 55, 38, 19\}$,
usw.

Dabei ist die Summe der Teilperioden immer gleich 2^h, und ihre Anzahl entspricht genau der Folge der Fibonacci-Zahlen. (OEIS Folge A000045)

Anhang 3 zeigt eine Liste der ersten Perioden und Teilperioden der $C^h(s)$.

Satz 4: Sei $S(h)$ die Summe der Teilperioden der Teilfolgen $C^h(s)$, dann gilt für alle $h \in \mathbb{N}$, $h \geq 2$

$$S(h) = 2^h.$$

□

Satz 5: Sei $A(h)$ die Anzahl der Teilperioden der Teilfolgen $C^h(s)$, dann gilt für alle $h \in \mathbb{N}$, $h \geq 2$

$$A(h) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{h-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{h-1} \right].$$

□

5.2 Die Anzahl der Folgenglieder der $C^t(s)$

Werden die Teilfolgen $C^t(s)$ auf dieselbe Weise analysiert wie die Teilfolgen $C^h(s)$ in Kapitel 5.1, so ergibt sich für die Periodizität ihrer Gliederzahl

$t = 2$ mit $16\ \{11, 5\}$,
$t = 3$ mit $32\ \{3, 11, 7, 11\}$
$t = 4$ mit $64\ \{2, 7, 12, 2, 7, 21, 1, 12\}$,
$t = 5$ mit $128\ \{3, 1, 7, 6, 14, 15, 8, 1, 5, 14, 11, 4, 9, 30\}$,
$t = 6$ mit $256\ \{8, 27, 3, 25, 3, 9, 16, 10, 9, 1, 27, 9, 4, 9, 1, 8, \ldots\}$,
$t = 7$ mit $512\ \{17, 7, 19, 5, 2, 7, 42, 2, 36, 19, 25, 7, 7, 19, 1, \ldots\}$,
$t = 8$ mit $1024\ \{3, 23, 4, 8, 13, 1, 13, 14, 1, 23, 7, 16, 16, 1, \ldots\}$,
usw.

Dabei ist die Summe der Teilperioden immer gleich 2^{t+2}, und ihre Anzahl beruht auf der Folge der Fibonacci-Zahlen, wobei jede Zahl der Fibonacci-Folge erst mit 2 multipliziert und dann mit 2 subtrahiert wird. (OEIS Folge A019274)

Anhang 4 zeigt eine Liste der ersten Perioden und Teilperioden der $C^t(s)$.

Satz 6: Sei $S(t)$ die Summe der Teilperioden der Teilfolgen $C^t(s)$, dann gilt für alle $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$

$$S(t) = 2^{t+2}.$$

□

Satz 7: Sei $A(t)$ die Anzahl der Teilperioden der Teilfolgen $C^t(s)$, dann gilt für alle $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$

$$A(t) = \frac{2}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} \right] - 2.$$

□

6 Stoppzeit

6.1 Die Stoppzeit $\sigma(s)$

Wird in $C(s)$ für eine Startzahl $s \in \mathbb{N}$ nach endlich vielen Iterationsschritten k erstmals eine Zahl $T^k(s) < s$ erreicht, so nennt man dieses k die Stoppzeit von s und bezeichnet sie mit $\sigma(s)$.

Satz 1 ist nun äquivalent zu der Aussage, dass alle $s \in \mathbb{N}$ endliche Stoppzeit besitzen.

J. C. Everett[1] hat bewiesen, dass *fast alle* $s \in \mathbb{N}$ endliche Stoppzeit besitzen, und R. Terras[3] hat eine Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion für Stoppzeiten angegeben.

Allgemein gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$

$$\sigma(s) = \lfloor 1 + n \cdot \log_2 3 \rfloor \quad \text{für alle} \quad s \equiv s_{n_1}, s_{n_2}, \ldots, s_{n_z} \, mod \, 2^{\sigma(s)}.$$

Es ist dann

$$\begin{array}{lll}
\sigma(s) = 1 & \text{für alle} & s \equiv 0 \, mod \, 2, \\
\sigma(s) = 2 & \text{für alle} & s \equiv 1 \, mod \, 2^2, \\
\sigma(s) = 4 & \text{für alle} & s \equiv 3 \, mod \, 2^4, \\
\sigma(s) = 5 & \text{für alle} & s \equiv 11, 23 \, mod \, 2^5, \\
\sigma(s) = 7 & \text{für alle} & s \equiv 7, 15, 59 \, mod \, 2^7, \\
\sigma(s) = 8 & \text{für alle} & s \equiv 39, 79, 95, 123, 175, 199, 219 \, mod \, 2^8, \\
\sigma(s) = 10 & \text{für alle} & s \equiv 287, 347, 367, 423, 507, 575, 583, \ldots \, mod \, 2^{10}, \\
\text{usw.} & &
\end{array}$$

Die möglichen Stoppzeiten $\sigma(s)$ sind gelistet unter (OEIS Folge A020914). Die zugehörigen Restklassen $s_n \, mod \, 2^{\sigma(s)}$ sind gelistet unter (OEIS Folge A177789). Die Anzahlen $z(n)$ der Restklassen für $n \geq 1$ sind gelistet unter (OEIS Folge A100982).

Anhang 5 zeigt eine Liste der ersten Restklassen $s_n \, mod \, 2^{\sigma(s)}$.

6.2 Eine Stoppzeit-Term-Formel für ungerade s

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt eine *ungerade* Zahl s die Stoppzeit $\sigma(s) = \lfloor 1+n \cdot \log_2 3 \rfloor$, wenn seine Teilfolge $C^{\sigma(s)}(s)$ genau n *ungerade* Folgenglieder besitzt und $\alpha_i = k$ ist, genau und nur dann wenn $T^k(s)$ in $C^{\sigma(s)}(s)$ *ungerade* ist. Dann gilt

$$T^{\sigma(s)}(s) = \frac{3^n}{2^{\sigma(s)}} \cdot s + \sum_{i=1}^{n} \frac{3^{n-i} 2^{\alpha_i}}{2^{\sigma(s)}} < T^0(s).$$

Beispiel: Für $n = 3$ gilt $\sigma(s) = \lfloor 1 + 3 \cdot \log_2 3 \rfloor = 5$. Für $s = 11$ ergibt sich dann

$$T^5(11) = \frac{3^3}{2^5} \cdot 11 + \frac{3^2 2^0 + 3^1 2^1 + 3^0 2^3}{2^5} = 10 < 11.$$

Begründung: Für $s = 11$ ergibt sich die Teilfolge $C^5(11) = (11, 17, 26, 13, 20, 10)$ mit den $n = 3$ *ungeraden* Folgengliedern $11, 17, 13$. Die Zweierpotenzen α_i ergeben sich folgendermaßen. $T^0 = 11$ ist ungerade, also ist $\alpha_1 = 0$. $T^1 = 17$ ist ungerade, also ist $\alpha_2 = 1$. $T^2 = 26$ ist gerade. $T^3 = 13$ ist ungerade, also ist $\alpha_3 = 3$. $T^4 = 20$ ist gerade.

Die Stoppzeit $\sigma(s) = 5$ gilt dann nicht nur für $s = 11$, sondern für alle $s \equiv 11 \, mod \, 2^5$.

Satz 1 ist somit äquivalent zu der Aussage, dass es zu jedem ungeraden $s \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ und ein entsprechendes *binäres Tupel* aus Einsen und Nullen für die Zweierpotenzen 2^{α_i} in der obigen Formel gibt, so dass das Ergebnis eine natürliche Zahl ist. Die Stoppzeit-Term-Formel wirkt damit als *diophantische Gleichung*.

Satz 8: Sei $z(n)$ die Anzahl der Restklassen $s_{n_1}, s_{n_2}, \ldots, s_{n_z} \, mod \, 2^{\sigma(s)}$, so dass $\sigma(s) = \lfloor 1 + n \cdot \log_2 3 \rfloor$ für alle $s \equiv s_{n_1}, s_{n_2}, \ldots, s_{n_z} \, mod \, 2^{\sigma(s)}$ gilt. Dann ist $z(n)$ für alle $n \geq 2$ basierend auf dem Term $\lfloor (n-1) \cdot \log_2 3 \rfloor - n - 1$ algorithmisch generierbar.

Beweis: Ein solcher Algorithmus findet sich ausführlich beschrieben in meinem Text "*On a stopping time algorithm of the 3n + 1 function*äus dem Jahr 2011.[6] Der Algorithmus basiert auf der Konstruktion und Sortierung der nötigen binären Tupel für die die Stoppzeit-Term-Formel ganzzahlige Lösungen liefert. Erstmals beschrieben wurde dieses Verfahren von mir in meinem 2010er Text.[7]

Zurzeit wird von mir ein weiterer Algorithmus zur Erzeugung der Zahlen $z(n)$ entwickelt. Wie beim ersten Algorithmus werden die Zahlen mittels einfacher Ganzzahl-Arithmetik generiert. Die Basis beider Algorithmen bildet dabei der Term $\lfloor (n-1) \cdot \log_2 3 \rfloor - n - 1$. Doch während der erste Algorithmus lediglich ein paar Startwerte dieses Terms benötigt um die weiteren Werte *Zeile für Zeile* für jedes n zu erzeugen, basiert der zweite Algorithmus auf der unendlichen Folge des Terms und erzeugt die gleichen Werte *Spalte für Spalte* für jeweils alle $n \in \mathbb{N}$.

Anhang 7 zeigt beide Algorithmen in der Programmiersprache PARI/GP.

6.3 Die Teilfolgen-Stoppzeit $\tau(s)$

Sei $\tau(s)$ die Anzahl der Teilfolgen $C^t(s)$ bis $\sigma(s)$ für eine Startzahl $s \equiv 3, 7 \, mod \, 12$ erreicht ist.

Dabei sei auch $\sigma(s) = t + 1$ für die letzte Teilfolge berücksichtigt, für den Fall $T^t(s) > T^0(s)$ mit $T^{t+1}(s) = \frac{T^t(s)}{2} < T^0(s)$, obwohl $T^{t+1}(s)$ laut Definition kein Glied von $C^t(s)$ ist.

Beispiel: Es ist $\tau(19) = 1$, da die Stoppzeit schon in der *ersten* Teilfolge $C^t(s)$ erreicht wird. Denn $C^3(19) = (19, 29, 44, 22)$ und $\sigma(19) = 4$ mit $T^4(19) = 11$.

Beispiel: Es ist $\tau(187) = 2$, da $C^2(187) = (187, 281, 422)$ und $C^3(211) = (211, 317, 476, 238)$. Mit $T^4(211) = 119$ ist dann in der *zweiten* Teilfolge erstmals eine kleinere Zahl als die Startzahl erreicht. Es ist $\sigma(187) = 2 + 1 + 4 = 7$, da $T^0 = 211$ als Glied mitgezählt wird.

Für $\tau(s) = 1$ gilt

$\sigma(s) = 4$	für alle	$s \equiv 3, 19 \, mod \, 3 \cdot 2^4$,
$\sigma(s) = 5$	für alle	$s \equiv 43, 55, 75, 87 \, mod \, 3 \cdot 2^5$,
$\sigma(s) = 7$	für alle	$s \equiv 7, 15, 135, 271 \, mod \, 3 \cdot 2^7$,
$\sigma(s) = 8$	für alle	$s \equiv 79, 175, 199, 351, 591, 607, 687, 711 \, mod \, 3 \cdot 2^8$,
$\sigma(s) = 10$	für alle	$s \equiv 735, 1311, 1599, 1759, 1839, \ldots \, mod \, 3 \cdot 2^{10}$,
$\sigma(s) = 12$	für alle	$s \equiv 1087, 1855, 2239, 3295, 4479, \ldots \, mod \, 3 \cdot 2^{12}$,
$\sigma(s) = 13$	für alle	$s \equiv 255, 303, 543, 1215, 1567, 2431, \ldots \, mod \, 3 \cdot 2^{13}$,
usw.		

Für $\tau(s) = 2$ gilt

$\sigma(s) = 7$	für alle	$s \equiv 187, 315 \, mod \, 3 \cdot 2^7$,
$\sigma(s) = 8$	für alle	$s \equiv 39, 123, 219, 295, 379, 475 \, mod \, 3 \cdot 2^8$,
$\sigma(s) = 10$	für alle	$s \equiv 367, 423, 583, 975, 999, 1371, \ldots \, mod \, 3 \cdot 2^{10}$,
$\sigma(s) = 12$	für alle	$s \equiv 231, 463, 615, 879, 1231, 1435, \ldots \, mod \, 3 \cdot 2^{12}$,
$\sigma(s) = 13$	für alle	$s \equiv 207, 799, 1071, 1327, 1563, \ldots \, mod \, 3 \cdot 2^{13}$,
$\sigma(s) = 15$	für alle	$s \equiv 415, 2719, 2767, 2799, 2847, \ldots \, mod \, 3 \cdot 2^{15}$,
$\sigma(s) = 16$	für alle	$s \equiv 1183, 1351, 2367, 3103, 4335, \ldots \, mod \, 3 \cdot 2^{16}$,
usw.		

Für $\tau(s) = 3$ gilt

$\sigma(s) = 10$	für alle	$s \equiv 507, 1531 \, mod \, 3 \cdot 2^{10}$,
$\sigma(s) = 12$	für alle	$s \equiv 3675, 5115, 5799, 5883, 7771, \ldots \, mod \, 3 \cdot 2^{12}$,
$\sigma(s) = 13$	für alle	$s \equiv 679, 1135, 1191, 3067, 3835, \ldots \, mod \, 3 \cdot 2^{13}$,
$\sigma(s) = 15$	für alle	$s \equiv 411, 1095, 1275, 1903, 2119, \ldots \, mod \, 3 \cdot 2^{15}$,
$\sigma(s) = 16$	für alle	$s \equiv 559, 859, 1179, 1519, 2407, \ldots \, mod \, 3 \cdot 2^{16}$,
$\sigma(s) = 18$	für alle	$s \equiv 4543, 5167, 6055, 6079, 6367, \ldots \, mod \, 3 \cdot 2^{18}$,
$\sigma(s) = 20$	für alle	$s \equiv 2175, 3279, 3871, 4167, 4351, \ldots \, mod \, 3 \cdot 2^{20}$,
usw.		

Anhang 6 zeigt eine Liste der ersten Restklassen modulo $3 \cdot 2^{\sigma(s)}$ für $\tau(s) = 1, \ldots, 6$.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Anzahlen der ersten Restklassen je möglicher Stoppzeit modulo $3 \cdot 2^{\sigma(s)}$ für $\tau(s) = 1, \ldots, 7$.

	n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	$\sigma(s)$	4	5	7	8	10	12	13	15	16	18	20	21	23
$\tau(s)$														
1		2	4	4	8	8	16	32	32	64	64	128	256	256
2				2	6	14	36	96	160	384	544	1248	2880	3776
3						2	8	40	136	416	912	2480	6976	12736
4								2	18	86	372	1290	4924	13508
5										2	30	156	1008	4584
6												2	46	410
7														2

Der algorithmische Zusammenhang zwischen $\sigma(s)$ und $\tau(s)$ wird deutlich, wenn je Spalte für n bzw. $\sigma(s)$ die Summe der Anzahlen gebildet wird. Wird das Ergebnis halbiert, ergeben sich für $n \geq 2$ wieder genau die Anzahlen $z(n)$ der Restklassen aus Kapitel 6.1. (OEIS Folge A100982)

Satz 9: Für alle $n \geq 2$ mit $\sigma(s) = \lfloor 1 + n \cdot \log_2 3 \rfloor$ sei $A_{\tau(s)}(n)$ die Anzahl der Restklassen modulo $3 \cdot 2^{\sigma(s)}$ für $\tau(s) \geq 1$ der Teilfolgen $C^t(s)$. Für die Anzahl $z(n)$ der Restklassen modulo $2^{\sigma(s)}$ gilt dann

$$z(n) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\tau(s)=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{\tau(s)}(n).$$

□

Beispiel: Für $n = 8$ ergibt sich die Restklassen-Anzahl $z(8) = 85$. Zum Vergleich siehe obige Tabelle, Anhang 5 oder (OEIS Folge A100982).

$$z(8) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\tau(s)=1}^{4} A_{\tau(s)}(8) = \frac{1}{2} \left(A_1(8) + A_2(8) + A_3(8) + A_4(8) \right)$$

$$= \frac{32 + 96 + 40 + 2}{2} = 85.$$

Für $\tau(s) = 1$ ist die Anzahl der Restklassen für alle $n \geq 2$ immer eine Zweierpotenz. Hierfür gilt speziell der folgende Satz.

Satz 10: Sei $A_{\tau(s)}(n)$ die Anzahl der Restklassen modulo $3 \cdot 2^{\sigma(s)}$ für $\tau(s) \geq 1$ mit $\sigma(s) = \lfloor 1 + n \cdot \log_2 3 \rfloor$ der Teilfolgen $C^t(s)$, dann gilt für $\tau(s) = 1$ mit $n \geq 2$

$$A_1(n) = 2^m \quad \text{mit} \quad m = \lfloor 1 + (n-1) \cdot \log_2 3 \rfloor - (n-1).$$

$\square$

Die Folge der Exponenten m ist gelistet unter (OEIS Folge A098294).

7 Grenzwerte und asymptotische Dichten

7.1 Die Teilfolgen $C^t(s)$ mit $\tau(s) = 1$

Das Verhalten einer einzelnen Teilfolge $C^t(s)$ ist formelmäßig nicht trivial vorhersagbar. Das heißt, dass einem Startwert s der Restklassen $3, 7 \, mod \, 12$ nicht einfach zu entnehmen ist, wie viele Glieder die zugehörige Teilfolge besitzt und wie sie sich entwickeln wird. Ob sie also endliche Stoppzeit besitzt oder nicht, oder sogar zur 1 führt.

Die Kapitel 4 bis 6 zeigen jedoch, dass die statistische Verteilung der Teilfolgen $C^t(s)$ bezogen auf ihre Länge und Stoppzeit algorithmisch exakt beschreibbar ist.

Satz 11: Sei $A(s)$ die Anzahl aller Teilfolgen $C^t(s)$ für alle $s \equiv 3, 7 \, mod \, 12$ bis zu einer festgelegten Grenze $s = 2^G$, und $A_\sigma^G(s)$ die Anzahl dieser Teilfolgen mit endlicher Stoppzeit für s und $\tau(s) = 1$, dann gilt

$$\lim_{G \to \infty} \frac{A(s)}{A_\sigma^G(s)} \approx 1,5.$$

Beweis: Unter den ersten $s = 2^G$ natürlichen Zahlen gibt es genau $\left\lfloor \frac{s+5}{6} \right\rfloor$ Zahlen der Restklassen $3, 7 \, mod \, 12$. Somit gilt

$$\left\lfloor \frac{s+5}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2^G+5}{6} \right\rfloor, \quad \text{sowie} \quad A(s) \approx \frac{2^{G-1}}{3}.$$

Sei $A_\sigma(s)$ die Anzahl der Teilfolgen mit endlicher Stoppzeit $\sigma(s) = \lfloor 1 + n \cdot \log_2 3 \rfloor$ für ein *bestimmtes* n aus der Menge der $A(s)$ Teilfolgen, dann gilt

$$A_\sigma(s) = \frac{s \cdot A_{\tau(s)}(n)}{3 \cdot 2^{\sigma(s)}} = \frac{2^G \cdot A_{\tau(s)}(n)}{3 \cdot 2^{\sigma(s)}},$$

und für $\tau(s) = 1$ gilt nach Satz 10

$$A_\sigma(s) = \frac{2^G \cdot A_1(n)}{3 \cdot 2^{\sigma(s)}} = \frac{2^G \cdot 2^m}{3 \cdot 2^{\sigma(s)}}.$$

Da $\sigma(s) > m$ für alle $n \geq 0$, gilt

$$A_\sigma(s) = \frac{2^G}{3 \cdot 2^{\sigma(s)-m}}.$$

Für die Summe $A_\sigma^G(s)$ aller $A_\sigma(s)$ für $n = 2, \dots, G$ gilt

$$A_\sigma^G(s) = \sum_{n=2}^{G} A_\sigma(s) = \sum_{n=2}^{G} \frac{2^G}{3 \cdot 2^{\sigma(s)-m}}.$$

Für den Quotienten $\frac{A(s)}{A_\sigma^G(s)}$ gilt

$$\frac{A(s)}{A_\sigma^G(s)} = \frac{\frac{2^{G-1}}{3}}{\sum_{n=2}^{G} \frac{2^G}{3 \cdot 2^{\sigma(s)-m}}} = \frac{2^{G-1}}{\sum_{n=2}^{G} \frac{2^G}{3 \cdot 2^{\sigma(s)-m}}}.$$

Mit $\sigma(s) = \lfloor 1 + n \cdot \log_2 3 \rfloor$ und $m = \lfloor 1 + (n-1) \cdot \log_2 3 \rfloor - (n-1)$ gilt dann

$$\frac{A(s)}{A_\sigma^G(s)} = \frac{2^{G-1}}{\sum_{n=2}^{G} \frac{2^G}{2^{\lfloor n \cdot \log_2 3 \rfloor - \lfloor (n-1) \cdot \log_2 3 \rfloor + n - 1}}}.$$

Dabei gilt für den Term der Zweierpotenz für alle $n \geq 2$

$$\lfloor n \cdot \log_2 3 \rfloor - \lfloor (n-1) \cdot \log_2 3 \rfloor + n - 1 = n + \beta_n$$

mit der binären Sequenz

$$\beta_n = 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, \dots$$

Vermutlich ist die binäre Sequenz β_n gleich der sogenannten *Sturm-Sequenz* für die Steigung der Quadratwurzel aus Zwei, gelistet unter (OEIS Folge A144611). Für die Berechnung des Grenzwertes spielt dies jedoch keine Rolle.

Somit gilt

$$\frac{A(s)}{A_\sigma^G(s)} = \frac{2^{G-1}}{\sum_{n=2}^{G} \frac{2^G}{2^{n+\beta_n}}} = \frac{2^{G-1}}{\sum_{n=2}^{G} 2^{G-n-\beta_n}}$$

$$= \frac{2^{G-1}}{2^{G-3} + 2^{G-3} + 2^{G-5} + 2^{G-5} + 2^{G-7} + \dots + 2^{2-\beta_{G-2}} + 2^{1-\beta_{G-1}} + 2^{-\beta_G}}.$$

Wird nun für diesen Quotienten der Grenzwert für G gegen Unendlich gebildet, ergibt sich

$$\lim_{G \to \infty} \frac{2^{G-1}}{\sum_{n=2}^{G} 2^{G-n-\beta_n}} = 1,5121861\dots.$$

□

Die Folge der Quotienten konvergiert schon recht früh. Der Grenzwert gilt somit schon für kleine s.

Beispiel: Für $G = 11$ ergibt sich schon ein recht genauer Wert.

$$\frac{A(s)}{A_\sigma^{11}(s)} = \frac{2^{11-1}}{\sum_{n=2}^{11} 2^{11-n-\beta_n}}$$

$$= \frac{2^{10}}{2^8 + 2^8 + 2^6 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^3 + 2^1 + 2^1 + 2^{-1}} = \frac{1024}{676,5} \approx 1,51367.$$

7.2 Die Teilfolgen $C^t(s)$ mit $\tau(s) \geq 1$

Der Beweis für $\tau(s) = 1$ lässt sich auch für alle $\tau(s) \geq 1$ führen und verläuft analog zu dem von Satz 11.

Satz 12: Sei $A(s)$ die Anzahl aller Teilfolgen $C^t(s)$ für alle $s \equiv 3,7\, mod\, 12$ bis zu einer festgelegten Grenze $s = 2^G$, und $A_\sigma^G(s)$ die Anzahl dieser Teilfolgen mit endlicher Stoppzeit für s und $\tau(s) \geq 1$, dann gilt

$$\lim_{G\to\infty} \frac{A(s)}{A_\sigma^G(s)} = 1.$$

Beweis: Unter den ersten $s = 2^G$ natürlichen Zahlen gibt es genau $\left\lfloor \frac{s+5}{6} \right\rfloor$ Zahlen der Restklassen $3,7\, mod\, 12$. Somit gilt

$$\left\lfloor \frac{s+5}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2^G+5}{6} \right\rfloor, \quad \text{sowie} \quad A(s) \approx \frac{2^{G-1}}{3}.$$

Sei$A_\sigma(s)$ die Anzahl der Teilfolgen mit endlicher Stoppzeit $\sigma(s) = \lfloor 1 + n \cdot \log_2 3 \rfloor$ für $\tau(s) \geq 1$ für ein *bestimmtes* n aus der Menge der $A(s)$ Teilfolgen, dann gilt nach Satz 9

$$A_\sigma(s) = \frac{s \cdot \sum_{\tau(s)=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{\tau(s)}(n)}{3 \cdot 2^{\sigma(s)}} = \frac{s \cdot 2 \cdot z(n)}{3 \cdot 2^{\sigma(s)}} = \frac{2^G \cdot 2 \cdot z(n)}{3 \cdot 2^{\sigma(s)}} = \frac{2^{G+1} \cdot z(n)}{3 \cdot 2^{\sigma(s)}}.$$

Für die Summe $A_\sigma^G(s)$ aller $A_\sigma(s)$ für $n = 2, \ldots, G$ gilt

$$A_\sigma^G(s) = \sum_{n=2}^{G} A_\sigma(s) = \sum_{n=2}^{G} \frac{2^{G+1} \cdot z(n)}{3 \cdot 2^{\sigma(s)}}.$$

Für den Quotienten $\frac{A(s)}{A_\sigma^G(s)}$ gilt dann mit $\sigma(s) = \lfloor 1 + n \cdot \log_2 3 \rfloor$

$$\frac{A(s)}{A_\sigma^G(s)} = \frac{\frac{2^{G-1}}{3}}{\sum_{n=2}^G \frac{2^{G+1}\cdot z(n)}{3\cdot 2^{\sigma(s)}}} = \frac{2^{G-1}}{\sum_{n=2}^G \frac{2^{G+1}\cdot z(n)}{2^{\sigma(s)}}} = \frac{2^{G-1}}{\sum_{n=2}^G 2^{G+1-\sigma(s)}\cdot z(n)}$$

$$= \frac{2^{G-1}}{\sum_{n=2}^G 2^{G+1-\lfloor 1+n\cdot\log_2 3\rfloor}\cdot z(n)} = \frac{2^{G-1}}{\sum_{n=2}^G 2^{G-\lfloor n\cdot\log_2 3\rfloor}\cdot z(n)}$$

$$= \frac{2^{G-1}}{2^{G-3}z(2) + 2^{G-4}z(3) + \cdots + 2^{G-\lfloor (G-1)\cdot\log_2 3\rfloor}z(G-1) + 2^{G-\lfloor G\cdot\log_2 3\rfloor}z(G)}.$$

Nach Satz 8 lassen sich die Zahlen $z(n)$ algorithmisch exakt generieren, was beweist, dass diese Zahlen einem bestimmten Wachstum unterliegen. Es ist

$$z(n) = 1, 2, 3, 7, 12, 30, 85, 173, 476, 961, 2652, 8045, 17637, \ldots$$

Wird nun für den Quotienten der Grenzwert für G gegen Unendlich gebildet, ergibt sich

$$\lim_{G\to\infty} \frac{2^{G-1}}{\sum_{n=2}^G 2^{G-\lfloor n\cdot\log_2 3\rfloor}\cdot z(n)} = 1.$$

$\square$

Beispiel: Für $G = 100$ ergibt sich $\frac{A(s)}{A_\sigma^{100}(s)} \approx 1,00007$. Für $G = 200$ ergibt sich $\frac{A(s)}{A_\sigma^{200}(s)} \approx 1,0000001$.

8 Konsequenzen für unendliches Wachstum

8.1 Allgemeines zur Stoppzeit

Da die Teilfolgen $C^t(s)$ keine Zahlen der Restklasse $9\,mod\,12$ besitzen, kann eine Teilfolge $C^h(s)$ nur der Anfang einer Folge sein bzw. auf eine Folge führen die ins Unendliche wächst oder in einen weiteren Zyklus gerät. Gemäß Satz 3 trifft jede Teilfolge $C^h(s)$ nach endlich vielen Iterationsschritten auf eine Zahl der Restklasse $3\,mod\,4$ und damit auf eine Teilfolge $C^t(s)$ oder führt direkt zur 1.

Aus Lemma 1 folgt $\sigma(s) = 1$ für alle $s \equiv 0\,mod\,2$, und aus Lemma 2 folgt $\sigma(s) = 2$ für alle $s \equiv 1\,mod\,4$. Da $\mathbb{N} = [0]_2 \sqcup [1]_4 \sqcup [3]_4$ bleibt noch das Stoppzeitverhalten der Startzahlen $s \equiv 3\,mod\,4$ zu klären.

Die Vereinigung aller Teilfolgen $C^{t_A}(s)$ und $C^{t_B}(s)$ beinhaltet die Menge aller $s \equiv 3\,mod\,4$. Dabei ist jede Zahl dieser Restklasse *eindeutig* einer Teilfolge zugeordnet.

Somit gilt Satz 1 genau dann, wenn alle $s \equiv 3, 7 \, mod \, 12$ endliche Stoppzeit besitzen.

Begründung: Für die Teilfolgen $C^t(s)$ gilt auf Grund ihrer Struktur: Ist ein Glied $T^{max_g+1}(s), \ldots, T^t(s) < T^0(s)$, dann besitzen alle Glieder $T^0(s), \ldots, T^{max_u-1}(s) \equiv 3 \, mod \, 4$ endliche Stoppzeit. Die Teilfolgen $C^h(s)$ besitzen alle endliche Stoppzeit, da ihr letztes Folgenglied $T^h(s)$ immer ein ungerades globales Minimum bildet.

8.2 Bedeutung der Grenzwerte

Der Grenzwert $\lim_{G\to\infty} \frac{A(s)}{A^G_\sigma(s)} = 1$ aus Satz 12 zeigt, dass ab einem hinreichend großen s *fast jede* Teilfolge $C^t(s)$, und damit auch *fast jedes* $s \equiv 3, 7 \, mod \, 12$, endliche Stoppzeit besitzt. Dies ist unter Berücksichtigung von Kapitel 8.1 dasselbe Ergebnis, welches schon Everett und Terras 1979 erzielt haben. Somit ist Satz 12 zwar noch kein Beweis für Satz 1, doch er belegt zusammen mit Satz 9 und den Teilfolgen-Stoppzeiten $\tau(s)$ für $s \geq 2$ (siehe Kapitel 6.3) die Korrektheit von Satz 10 und damit auch von Satz 11.

Der Grenzwert $\lim_{G\to\infty} \frac{A(s)}{A^G_\sigma(s)} \approx 1,5$ aus Satz 11 zeigt, dass (schon ab einem kleinen s, da früh konvergierend) statistisch betrachtet zwei Drittel aller Teilfolgen $C^t(s)$ bzw. zwei von drei aufeinander folgende Teilfolgen $C^t(s)$ endliche Stoppzeit besitzen.

8.3 Wachstum und Zusammenbruch einer Collatz-Folge

Besitzt eine Teilfolge $C^t(s)$ endliche Stoppzeit, gilt also $\tau(s) = 1$, sei sie bezeichnet als *Stoppzeitfolge*, andernfalls als *Wachstumsfolge*.

Eine ins Unendliche wachsende Folge $C^\infty(s)$ müsste eine unendliche Menge von Teilfolgen $C^{t_A}(s)$ durchlaufen und ein ungerades Minimum der Restklasse $[3]_4$ besitzen. Dieses Minimum wäre dann eine Startzahl, die keine endliche Stoppzeit besitzen dürfte.

Es ist anzunehmen, dass $C^\infty(s)$ zwischen den einzelnen Teilfolgen $C^{t_A}(s)$ ziemlich chaotisch hin und her springt, mit der Tendenz immer höhere $C^{t_A}(s)$ bzw. immer größere Zahlen der Restklasse $[3]_4$ zu durchlaufen.

Trotz dieses dynamischen Verhaltens müsste $C^\infty(s)$ auf seiner Reise durch die $C^{t_A}(s)$ einem sehr regelmäßigen Muster folgen um im Wachstum zu bleiben. Für einen stetigen Wachstumsprozess müsste $C^\infty(s)$ daher im Schnitt mehr Wachstumsfolgen als Stoppzeitfolgen durchlaufen. Die Wachstumsfolgen müssten dabei in dichter Folge hintereinander auftreten. Stoppzeitfolgen dürften diesen

Rhythmus immer nur kurz unterbrechen um den Wachstumsprozess nicht zu stark einbrechen zu lassen. Sehr lange Stoppzeitfolgen dürften nie durchlaufen werden, erst recht nicht in dichter Folge. Dies würde zu einem sofortigen Zusammenbruch des Wachstumsprozesses führen.

Kapitel 6 zeigt, dass die Teilfolgen $C^t(s)$ ihrer Länge t nach äußerst regelmäßig nach einem periodischen Muster untereinander verteilt sind. Diese Regelmäßigkeit der statistischen Längen-Verteilung muss sich auch in der Entwicklung jeder Collatz-Folge mit längerer Teilfolgen-Stoppzeit $\tau(s)$ widerspiegeln. Das bedeutet, dass $C^\infty(s)$ in regelmäßigen Abständen auch sehr lange $C^{t_A}(s)$ durchlaufen muss. Doch solche Teilfolgen besitzen meist eine sehr kleine Stoppzeit, was zu einer starken Schrumpfung der Glieder führt.

Satz 11 zeigt nun aber folgendes. Wenn im Schnitt zwei Drittel aller Teilfolgen $C^t(s)$ bzw. zwei von drei aufeinander folgende Teilfolgen $C^t(s)$ endliche Stoppzeit besitzen, dann müssen statistisch gesehen, trotz des dynamischen Verhaltens, mehr Stoppzeit- als Wachstumsfolgen durchlaufen werden, und dies auch in dichter Folge. Nach Kapitel 6 werden somit auch mehr lange Stoppzeit- als Wachstumsfolgen mit großem t durchlaufen. Auch nicht vergessen werden dürfen die Teilfolgen $C^{t_B}(s)$, die nie durchlaufen werden dürfen, da sie sofort zur 1 führen. Diese treten zwar selten auf, aber doch regelmäßig.

Egal welches Beispiel einer Collatz-Folge mit längerer Teilfolgen-Stoppzeiten $\tau(s)$ man sich auch ansieht. Es ist immer genau die prognostizierte Entwicklung von Wachstum und Zusammenbruch zu erkennen, wie sie hier beschrieben wird.

Nur mit immer größeren Startzahlen kann eine Collatz-Folge den ihr statistisch möglichen Wachstumsprozess verlängern. Doch gegen die Unendlichkeit bleibt dieser Prozess eben doch statistisch endlich und muss irgendwann zusammenbrechen.

Somit bleibt nur der Schluss, dass eine Collatz-Folge mit unendlichem Wachstum nicht existieren kann.

8.4 Abschließende Beispiele

Zwei abschließende Beispiele sollen den zwingend begrenzten Wachstumsprozess einer Collatz-Folge veranschaulichen. Stoppzeitfolgen sind dabei rot geschrieben.

Beispiel 1: $s = 27$ mit $\sigma(s) = 59$ und $\tau(s) = 10$.

C(27) = (27, 41, 62, 31, 47, 71, 107, 161, 242, 121, 182, 91, 137, 206, 103, 155, 233, 350, 175, 263, 395, 593, 890, 445, 668, 334, 167, 251, 377, 566, 283, 425, 638, 319, 479, 719, 1079, 1619, 2429, 3644, 1822, 911, 1367, 2051, 3077, 4616, 2308, 1154, 577, 866, 433, 650, 325, 488, 244, 122, 61, 92, 46, 23, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1).

Wird diese Folge nun in ihre einzelnen Teilfolgen $C^t(s)$ unterteilt, ergibt sich

(27, 41, 62),
(31, 47, 71, 107, 161, 242, 121, 182),
(91, 137, 206),
(103, 155, 233, 350),
(175, 263, 395, 593, 890, 445, 668, 334),
(111, 167, 251, 377, 566),
(283, 425, 638),
(319, 479, 719, 1079, 1619, 2429, 3644, 1822),
(607, 911, 1367, 2051, 3077, 4616, 2308, 1154, 577, 866, 433, 650, 325, 488, 244, 122, 61, 92, 46),
(15, 23, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1).

Obwohl diese Collatz-Folge nur zehn Teilfolgen besitzt lässt sich schon der Wachstumsprozess, dessen Zusammenbruch und das chaotische Hin- und Herspringen zwischen den Teilfolgen erkennen. Noch deutlicher wird diese Sprunghaftigkeit anhand der kompletten Liste der Teilfolgen in Anhang 1.

Bis zur achten Teilfolge zeigt sich das statistisch nötige und zu erwartende Wachstumsverhalten in Bezug auf Anzahl und Länge der Wachstums- und Stoppzeitfolgen. Auf diese Art könnte die Collatz-Folge ewig weiter wachsen.

Doch mit der neunten Teilfolge, welche mehr als doppelt so lang ist als der Durchschnitt und dementsprechend eine kleine Stoppzeit besitzt, beginnt der Zusammenbruch des Wachstumsprozesses. Die hier schon einsetzende starke Schrumpfung der Glieder wird gleich darauf von der nächsten Teilfolge, wieder eine Stoppzeitfolge, aufgegriffen und bis zur 1 weitergeführt.

Von zwei aufeinander folgenden Stoppzeitfolgen, wovon eine auch noch sehr viele Glieder besitzt, kann sich der Wachstumsprozess in dieser frühen Phase nicht mehr erholen und wird gestoppt.

Beispiel 2: $s = 2602714556700227743$ mit $\sigma(s) = 1005$ und $\tau(s) = 166$.

Da dieses Beispiel viele sehr große Zahlen besitzt, wird zur übersichtlicheren Darstellung der Teilfolgen für jedes Glied nur das Symbol $\circ$ verwendet. Die Entwicklung der Teilfolgen liest sich spaltenweise von links oben nach rechts unten.

Bis zur blauen Linie herrscht ein stetiger Wachstumsprozess, immer mal wieder kurz unterbrochen von kürzeren oder gleich langen Stoppzeitfolgen. Wegen der Größe der Zahlen sind auch die Teilfolgen im Schnitt länger als beim ersten Beispiel. Doch auch hier zeigt sich das statistisch nötige Wachstumsverhalten. Die Wachstumsfolgen treten häufiger, auch in direkter Folge auf, und sind im Schnitt länger als die Stoppzeitfolgen. Doch ab der blauen Linie kehrt sich dieser

Prozess um. Ab hier setzt ein stetiger Schrumpfungsprozess ein. Die Stoppzeitfolgen treten häufiger, auch in direkter Folge auf, und sind wesentlich länger als die Wachstumsfolgen.

9 Quellenangaben

1. C. J. Everett, Iteration of the number-theoretic function f(2n) = n, f(2n + 1) = 3n + 2, Advances in Math. 25 (1977), 42.

2. Lynn E. Garner, On the Collatz 3n + 1 Algorithm, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 82 (1981), 19-22.
(http://www.ams.org/journals/proc/1981-082-01/S0002 -9939-1981-0603593-2/S0002-9939-1981-0603593-2.pdf)

3. R. Terras, A stopping time problem on the positive integers, Acta Arith. 30 (1976), 241.

4. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)
(http://oeis.org) A000045, A019274, A020914, A177789, A100982, A098294, A144611

5. Wikipedia, Collatz conjecture.
(http://en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture)

6. Mike Winkler, On a stopping time algorithm of the 3n + 1 function, May 2011.
(http://mikewinkler.co.nf/collatz_algorithm.pdf)

7. Mike Winkler, Über das Stoppzeit-Verhalten der Collatz-Iteration, Okt 2010.
(http://mikewinkler.co.nf/collatz_algorithm_2010.pdf)

8. Günther J. Wirsching, Über das 3n + 1 Problem, Elem. Math. 55 (2000) 142 – 155.
(http://link.springer.com/article/10.1007/s000170050080#page-1)

9. Dieter Wolke, Das Collatz-Problem.
(http://home.mathematik.uni-freiburg.de/didaktik/material_download/collatzproblem .pdf)

10 Erklärung der Selbstständigkeit

Hiermit versichere ich, dass diese Arbeit von mir persönlich verfasst wurde und dass ich keinerlei fremde Hilfe in Anspruch genommen habe. Ebenso versichere ich, dass diese Arbeit oder Teile daraus weder von mir selbst noch von anderen als Leistungsnachweise andernorts eingereicht wurden. Wörtliche oder sinngemäße Übernahmen aus anderen Schriften und Veröffentlichungen in gedruckter oder elektronischer Form sind gekennzeichnet. Sämtliche Sekundärliteratur und sonstige Quellen sind nachgewiesen und in der Bibliographie aufgeführt. Das Gleiche gilt für graphische Darstellungen und Bilder sowie für alle Internetquellen.

Mike Winkler, Rosenweg 10, 45739 Oer-Erkenschwick

mike.winkler(at)gmx.de

11 Anhänge

11.1 Die ersten Teilfolgen $C^t(s)$

3, 5, 8, 4, 2, 1
7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1
15, 23, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1
19, 29, 44, 22
27, 41, 62
31, 47, 71, 107, 161, 242, 121, 182
39, 59, 89, 134
43, 65, 98, 49, 74, 37, 56, 28, 14
51, 77, 116, 58, 29, 44, 22
55, 83, 125, 188, 94
63, 95, 143, 215, 323, 485, 728, 364, 182
67, 101, 152, 76, 38
75, 113, 170, 85, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1
79, 119, 179, 269, 404, 202, 101, 152, 76, 38
87, 131, 197, 296, 148, 74, 37, 56, 28, 14
91, 137, 206
99, 149, 224, 112, 56, 28, 14
103, 155, 233, 350
111, 167, 251, 377, 566
115, 173, 260, 130, 65, 98, 49, 74, 37, 56, 28, 14
123, 185, 278,
127, 191, 287, 431, 647, 971, 1457, 2186, 1093, 1640, 820, 410, 205, 308, 154, 77, 116, 58, 29, 44, 22
135, 203, 305, 458, 229, 344, 172, 86
139, 209, 314, 157, 236, 118
147, 221, 332, 166
151, 227, 341, 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1
159, 239, 359, 539, 809, 1214
163, 245, 368, 184, 92, 46
171, 257, 386, 193, 290, 145, 218, 109, 164, 82, 41, 62
175, 263, 395, 593, 890, 445, 668, 334
183, 275, 413, 620, 310
187, 281, 422
195, 293, 440, 220, 110
199, 299, 449, 674, 337, 506, 253, 380, 190
207, 311, 467, 701, 1052, 526
211, 317, 476, 238
219, 329, 494
223, 335, 503, 755, 1133, 1700, 850, 425, 638
231, 347, 521, 782
235, 353, 530, 265, 398
243, 365, 548, 274, 137, 206
247, 371, 557, 836, 418, 209, 314, 157, 236, 118
255, 383, 575, 863, 1295, 1943, 2915, 4373, 6560, 3280, 1640, 820, 410, 205, 308, 154, 77, 116, 58, 29, 44, 22
259, 389, 584, 292, 146, 73, 110
267, 401, 602, 301, 452, 226, 113, 170, 85, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1
271, 407, 611, 917, 1376, 688, 344, 172, 86
279, 419, 629, 944, 472, 236, 118
283, 425, 638
291, 437, 656, 328, 164, 82, 41, 62
295, 443, 665, 998
303, 455, 683, 1025, 1538, 769, 1154, 577, 866, 433, 650, 325, 488, 244, 122, 61, 92, 46
307, 461, 692, 346, 173, 260, 130, 65, 98, 49, 74, 37, 56, 28, 14
315, 473, 710
319, 479, 719, 1079, 1619, 2429, 3644, 1822
327, 491, 737, 1106, 553, 830
331, 497, 746, 373, 560, 280, 140, 70
339, 509, 764, 382
343, 515, 773, 1160, 580, 290, 145, 218, 109, 164, 82, 41, 62
351, 527, 791, 1187, 1781, 2672, 1336, 668, 334
355, 533, 800, 400, 200, 100, 50, 25, 38
363, 545, 818, 409, 614
367, 551, 827, 1241, 1862
375, 563, 845, 1268, 634, 317, 476, 238
379, 569, 854
387, 581, 872, 436, 218, 109, 164, 82, 41, 62
391, 587, 881, 1322, 661, 992, 496, 248, 124, 62
399, 599, 899, 1349, 2024, 1012, 506, 253, 380, 190
403, 605, 908, 454
411, 617, 926
415, 623, 935, 1403, 2105, 3158
423, 635, 953, 1430
427, 641, 962, 481, 722, 361, 542
435, 653, 980, 490, 245, 368, 184, 92, 46
439, 659, 989, 1484, 742
447, 671, 1007, 1511, 2267, 3401, 5102
451, 677, 1016, 508, 254
459, 689, 1034, 517, 776, 388, 194, 97, 146, 73, 110
463, 695, 1043, 1565, 2348, 1174
471, 707, 1061, 1592, 796, 398
475, 713, 1070
483, 725, 1088, 544, 272, 136, 68, 34, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1
487, 731, 1097, 1646
495, 743, 1115, 1673, 2510
499, 749, 1124, 562, 281, 422
507, 761, 1142

511, 767, 1151, 1727, 2591, 3887, 5831, 8747, 13121, 19682, 9841, 14762, 7381, 11072, 5536, 2768, 1384, 692, 346, 173, 260, 130, 65, 98, 49, 74, 37, 56, 28, 14
519, 779, 1169, 1754, 877, 1316, 658, 329, 494
523, 785, 1178, 589, 884, 442, 221, 332, 166
531, 797, 1196, 598
535, 803, 1205, 1808, 904, 452, 226, 113, 170, 85, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1
543, 815, 1223, 1835, 2753, 4130, 2065, 3098, 1549, 2324, 1162, 581, 872, 436, 218, 109, 164, 82, 41, 62
547, 821, 1232, 616, 308, 154, 77, 116, 58, 29, 44, 22
555, 833, 1250, 625, 938, 469, 704, 352, 176, 88, 44, 22
559, 839, 1259, 1889, 2834, 1417, 2126
567, 851, 1277, 1916, 958
571, 857, 1286
579, 869, 1304, 652, 326
583, 875, 1313, 1970, 985, 1478
591, 887, 1331, 1997, 2996, 1498, 749, 1124, 562, 281, 422
595, 893, 1340, 670
603, 905, 1358
607, 911, 1367, 2051, 3077, 4616, 2308, 1154, 577, 866, 433, 650, 325, 488, 244, 122, 61, 92, 46
615, 923, 1385, 2078
619, 929, 1394, 697, 1046
627, 941, 1412, 706, 353, 530, 265, 398
631, 947, 1421, 2132, 1066, 533, 800, 400, 200, 100, 50, 25, 38
639, 959, 1439, 2159, 3239, 4859, 7289, 10934
643, 965, 1448, 724, 362, 181, 272, 136, 68, 34, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1
651, 977, 1466, 733, 1100, 550
655, 983, 1475, 2213, 3320, 1660, 830
663, 995, 1493, 2240, 1120, 560, 280, 140, 70
667, 1001, 1502
675, 1013, 1520, 760, 380, 190
679, 1019, 1529, 2294
687, 1031, 1547, 2321, 3482, 1741, 2612, 1306, 653, 980, 490, 245, 368, 184, 92, 46
691, 1037, 1556, 778, 389, 584, 292, 146, 73, 110
699, 1049, 1574
703, 1055, 1583, 2375, 3563, 5345, 8018, 4009, 6014
711, 1067, 1601, 2402, 1201, 1802, 901, 1352, 676, 338, 169, 254
715, 1073, 1610, 805, 1208, 604, 302
723, 1085, 1628, 814
727, 1091, 1637, 2456, 1228, 614
735, 1103, 1655, 2483, 3725, 5588, 2794, 1397, 2096, 1048, 524, 262
739, 1109, 1664, 832, 416, 208, 104, 52, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1
747, 1121, 1682, 841, 1262
751, 1127, 1691, 2537, 3806
759, 1139, 1709, 2564, 1282, 641, 962, 481, 722, 361, 542
763, 1145, 1718
771, 1157, 1736, 868, 434, 217, 326
775, 1163, 1745, 2618, 1309, 1964, 982
783, 1175, 1763, 2645, 3968, 1984, 992, 496, 248, 124, 62
787, 1181, 1772, 886
795, 1193, 1790
799, 1199, 1799, 2699, 4049, 6074, 3037, 4556, 2278
807, 1211, 1817, 2726
811, 1217, 1826, 913, 1370, 685, 1028, 514, 257, 386, 193, 290, 145, 218, 109, 164, 82, 41, 62
819, 1229, 1844, 922, 461, 692, 346, 173, 260, 130, 65, 98, 49, 74, 37, 56, 28, 14
823, 1235, 1853, 2780, 1390
831, 1247, 1871, 2807, 4211, 6317, 9476, 4738, 2369, 3554, 1777, 2666, 1333, 2000, 1000, 500, 250, 125, 188, 94
835, 1253, 1880, 940, 470
843, 1265, 1898, 949, 1424, 712, 356, 178, 89, 134
847, 1271, 1907, 2861, 4292, 2146, 1073, 1610, 805, 1208, 604, 302
855, 1283, 1925, 2888, 1444, 722, 361, 542
859, 1289, 1934
867, 1301, 1952, 976, 488, 244, 122, 61, 92, 46
871, 1307, 1961, 2942
879, 1319, 1979, 2969, 4454
883, 1325, 1988, 994, 497, 746, 373, 560, 280, 140, 70
891, 1337, 2006
895, 1343, 2015, 3023, 4535, 6803, 10205, 15308, 7654
903, 1355, 2033, 3050, 1525, 2288, 1144, 572, 286
907, 1361, 2042, 1021, 1532, 766
915, 1373, 2060, 1030
919, 1379, 2069, 3104, 1552, 776, 388, 194, 97, 146, 73, 110
927, 1391, 2087, 3131, 4697, 7046
931, 1397, 2096, 1048, 524, 26
939, 1409, 2114, 1057, 1586, 793, 1190
943, 1415, 2123, 3185, 4778, 2389, 3584, 1792, 896, 448, 224, 112, 56, 28, 14
951, 1427, 2141, 3212, 1606
955, 1433, 2150
963, 1445, 2168, 1084, 542
967, 1451, 2177, 3266, 1633, 2450, 1225, 1838
975, 1463, 2195, 3293, 4940, 2470
979, 1469, 2204, 1102
987, 1481, 2222
991, 1487, 2231, 3347, 5021, 7532, 3766
999, 1499, 2249, 3374
1003, 1505, 2258, 1129, 1694
1011, 1517, 2276, 1138, 569, 854
1015, 1523, 2285, 3428, 1714, 857, 1286
1023, 1535, 2303, 3455, 5183, 7775, 11663, 17495, 26243, 39365, 59048, 29524, 14762, 7381, 11072, 5536, 2768, 1384, 692, 346, 173, 260, 130, 65, 98, 49, 74, 37, 56, 28, 14
1027, 1541, 2312, 1156, 578, 289, 434, 217, 326

usw.

11.2 Die ersten Teilfolgen $C^h(s)$

9, 14, 7
21, 32, 16, 8, 4, 2, 1
33, 50, 25, 38, 19
45, 68, 34, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1
57, 86, 43
69, 104, 52, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1
81, 122, 61, 92, 46, 23
93, 140, 70, 35
105, 158, 79
117, 176, 88, 44, 22, 11
129, 194, 97, 146, 73, 110, 55
141, 212, 106, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1
153, 230, 115
165, 248, 124, 62, 31
177, 266, 133, 200, 100, 50, 25, 38, 19
189, 284, 142, 71
201, 302, 151
213, 320, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1
225, 338, 169, 254, 127
237, 356, 178, 89, 134, 67
249, 374, 187
261, 392, 196, 98, 49, 74, 37, 56, 28, 14, 7
273, 410, 205, 308, 154, 77, 116, 58, 29, 44, 22, 11
285, 428, 214, 107
297, 446, 223
309, 464, 232, 116, 58, 29, 44, 22, 11
321, 482, 241, 362, 181, 272, 136, 68, 34, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1
333, 500, 250, 125, 188, 94, 47
345, 518, 259
357, 536, 268, 134, 67
369, 554, 277, 416, 208, 104, 52, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1
381, 572, 286, 143
393, 590, 295
405, 608, 304, 152, 76, 38, 19
417, 626, 313, 470, 235
429, 644, 322, 161, 242, 121, 182, 91
441, 662, 331
453, 680, 340, 170, 85, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1
465, 698, 349, 524, 262, 131
477, 716, 358, 179
489, 734, 367
501, 752, 376, 188, 94, 47
513, 770, 385, 578, 289, 434, 217, 326, 163
525, 788, 394, 197, 296, 148, 74, 37, 56, 28, 14, 7
537, 806, 403
549, 824, 412, 206, 103
561, 842, 421, 632, 316, 158, 79
573, 860, 430, 215
585, 878, 439
597, 896, 448, 224, 112, 56, 28, 14, 7
609, 914, 457, 686, 343
621, 932, 466, 233, 350, 175
633, 950, 475
645, 968, 484, 242, 121, 182, 91
657, 986, 493, 740, 370, 185, 278, 139
669, 1004, 502, 251
681, 1022, 511
693, 1040, 520, 260, 130, 65, 98, 49, 74, 37, 56, 28, 14, 7
705, 1058, 529, 794, 397, 596, 298, 149, 224, 112, 56, 28, 14, 7
717, 1076, 538, 269, 404, 202, 101, 152, 76, 38, 19
729, 1094, 547
741, 1112, 556, 278, 139
753, 1130, 565, 848, 424, 212, 106, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1
765, 1148, 574, 287
777, 1166, 583
789, 1184, 592, 296, 148, 74, 37, 56, 28, 14, 7
801, 1202, 601, 902, 451
813, 1220, 610, 305, 458, 229, 344, 172, 86, 43
825, 1238, 619
837, 1256, 628, 314, 157, 236, 118, 59
849, 1274, 637, 956, 478, 239
861, 1292, 646, 323
873, 1310, 655
885, 1328, 664, 332, 166, 83
897, 1346, 673, 1010, 505, 758, 379
909, 1364, 682, 341, 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1
921, 1382, 691
933, 1400, 700, 350, 175
945, 1418, 709, 1064, 532, 266, 133, 200, 100, 50, 25, 38, 19
957, 1436, 718, 359
969, 1454, 727
981, 1472, 736, 368, 184, 92, 46, 23
993, 1490, 745, 1118, 559
1005, 1508, 754, 377, 566, 283
1017, 1526, 763
1029, 1544, 772, 386, 193, 290, 145, 218, 109, 164, 82, 41, 62, 31
1041, 1562, 781, 1172, 586, 293, 440, 220, 110, 55
1053, 1580, 790, 395
1065, 1598, 799

1077, 1616, 808, 404, 202, 101, 152, 76, 38, 19
1089, 1634, 817, 1226, 613, 920, 460, 230, 115
1101, 1652, 826, 413, 620, 310, 155
1113, 1670, 835
1125, 1688, 844, 422, 211
1137, 1706, 853, 1280, 640, 320, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1
1149, 1724, 862, 431
1161, 1742, 871
1173, 1760, 880, 440, 220, 110, 55
1185, 1778, 889, 1334, 667
1197, 1796, 898, 449, 674, 337, 506, 253, 380, 190, 95
1209, 1814, 907
1221, 1832, 916, 458, 229, 344, 172, 86, 43
1233, 1850, 925, 1388, 694, 347
1245, 1868, 934, 467
1257, 1886, 943
1269, 1904, 952, 476, 238, 119
1281, 1922, 961, 1442, 721, 1082, 541, 812, 406, 203
1293, 1940, 970, 485, 728, 364, 182, 91
1305, 1958, 979
1317, 1976, 988, 494, 247
1329, 1994, 997, 1496, 748, 374, 187
1341, 2012, 1006, 503
1353, 2030, 1015
1365, 2048, 1024, 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1
1377, 2066, 1033, 1550, 775
1389, 2084, 1042, 521, 782, 391
1401, 2102, 1051
1413, 2120, 1060, 530, 265, 398, 199
1425, 2138, 1069, 1604, 802, 401, 602, 301, 452, 226, 113, 170, 85, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1
1437, 2156, 1078, 539
1449, 2174, 1087
1461, 2192, 1096, 548, 274, 137, 206, 103
1473, 2210, 1105, 1658, 829, 1244, 622, 311
1485, 2228, 1114, 557, 836, 418, 209, 314, 157, 236, 118, 59
1497, 2246, 1123
1509, 2264, 1132, 566, 283
1521, 2282, 1141, 1712, 856, 428, 214, 107
1533, 2300, 1150, 575
1545, 2318, 1159
1557, 2336, 1168, 584, 292, 146, 73, 110, 55
1569, 2354, 1177, 1766, 883
1581, 2372, 1186, 593, 890, 445, 668, 334, 167
1593, 2390, 1195
1605, 2408, 1204, 602, 301, 452, 226, 113, 170, 85, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1
1617, 2426, 1213, 1820, 910, 455
1629, 2444, 1222, 611
1641, 2462, 1231
1653, 2480, 1240, 620, 310, 155
1665, 2498, 1249, 1874, 937, 1406, 703
1677, 2516, 1258, 629, 944, 472, 236, 118, 59
1689, 2534, 1267
1701, 2552, 1276, 638, 319
1713, 2570, 1285, 1928, 964, 482, 241, 362, 181, 272, 136, 68, 34, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8 4, 2, 1
1725, 2588, 1294, 647
1737, 2606, 1303
1749, 2624, 1312, 656, 328, 164, 82, 41, 62, 31
1761, 2642, 1321, 1982, 991
1773, 2660, 1330, 665, 998, 499
1785, 2678, 1339
1797, 2696, 1348, 674, 337, 506, 253, 380, 190, 95
1809, 2714, 1357, 2036, 1018, 509, 764, 382, 19
1821, 2732, 1366, 683
1833, 2750, 1375
1845, 2768, 1384, 692, 346, 173, 260, 130, 65, 98, 49, 74, 37, 56, 28, 14, 7
1857, 2786, 1393, 2090, 1045, 1568, 784, 392, 196, 98, 49, 74, 37, 56, 28, 14, 7
1869, 2804, 1402, 701, 1052, 526, 263
1881, 2822, 1411
1893, 2840, 1420, 710, 355
1905, 2858, 1429, 2144, 1072, 536, 268, 134, 67
1917, 2876, 1438, 719
1929, 2894, 1447
1941, 2912, 1456, 728, 364, 182, 91
1953, 2930, 1465, 2198, 1099
1965, 2948, 1474, 737, 1106, 553, 830, 415
1977, 2966, 1483
1989, 2984, 1492, 746, 373, 560, 280, 140, 70, 35
2001, 3002, 1501, 2252, 1126, 563
2013, 3020, 1510, 755
2025, 3038, 1519
2037, 3056, 1528, 764, 382, 191
2049, 3074, 1537, 2306, 1153, 1730, 865, 1298, 649, 974, 487
2061, 3092, 1546, 773, 1160, 580, 290, 145, 218, 109, 164, 82, 41, 62, 31
2073, 3110, 1555
2085, 3128, 1564, 782, 391
2097, 3146, 1573, 2360, 1180, 590, 295
2109, 3164, 1582, 791
2121, 3182, 1591
2133, 3200, 1600, 800, 400, 200, 100, 50, 25, 38, 19

usw.

11.3 Die ersten Perioden und Teilperioden der $C^h(s)$

4
{4}

8
{8}

16
{11, 5}

32
{3, 10, 19}

64
{17, 6, 13, 7, 21}

128
{19, 15, 12, 26, 14, 1, 4, 37}

256
{11, 17, 7, 41, 11, 28, 2, 8, 11, 8, 55, 38, 19}

512
{19, 3, 17, 39, 4, 16, 21, 1, 16, 3, 16, 60, 31, 76, 38, 19, 3, 34, 14, 5, 77}

1024
{6, 34, 71, 7, 8, 32, 17, 25, 2, 25, 7, 6, 15, 17, 67, 53, 23, 39, 77, 40, 35, 1, 75, 38, 6, 5, 40, 23, 9, 19, 10, 91, 63, 38}

2048
{21, 80, 67, 3, 2, 147, 3, 76, 12, 9, 1, 80, 46, 1, 4, 13, 38, 20, 9, 72, 4, 97, 126, 21, 55, 12, 9, 4, 55, 9, 133, 14, 16, 64, 13, 21, 7, 43, 4, 1, 49, 14, 12, 5, 25, 34, 134, 75, 31, 46, 51, 27, 25, 52, 56}

4096
{49, 101, 62, 92, 1, 8, 93, 47, 7, 13, 37, 104, 3, 8, 20, 81, 31, 11, 160, 85, 49, 6, 4, 41, 152, 8, 60, 33, 6, 29, 123, 24, 18, 2, 160, 92, 2, 8, 26, 25, 51, 5, 35, 1, 17, 43, 101, 8, 51, 143, 252, 42, 15, 84, 11, 1, 23, 18, 8, 110, 1, 17, 67, 104, 95, 9, 19, 32, 25, 36, 67, 26, 42, 14, 86, 8, 2, 39, 52, 7, 28, 24, 10, 50, 37, 31, 17, 100, 151}

8192
{172, 16, 4, 78, 104, 3, 11, 5, 12, 39, 48, 20, 100, 61, 13, 27, 35, 34, 71, 64, 65, 19, 16, 40, 224, 3, 97, 1, 202, 37, 87, 57, 28, 99, 2, 16, 79, 4, 103, 94, 14, 26, 67, 7, 9, 12, 108, 68, 11, 6, 16, 35, 5, 135, 27, 62, 22, 320, 1, 169, 98, 12, 8, 82, 19, 112, 72, 101, 16, 3, 117, 66, 12, 58, 67, 179, 48, 36, 4, 1, 319, 184, 4, 16, 52, 50, 11, 91, 10, 67, 3, 2, 19, 15, 86, 202, 16, 1, 101, 67, 28, 180, 11, 1, 196, 124, 28, 72, 83, 25, 59, 30, 168, 22, 2, 46, 36, 16, 81, 68, 36, 35, 2, 34, 134, 107, 96, 5, 190, 1, 4, 13, 38, 64, 50, 72, 63, 71, 29, 12, 11, 84, 1, 27}

16384
{144, 3, 32, 24, 143, 32, 6, 234, 121, 11, 1, 23, 45, 71, 134, 75, 128, 52, 103, 13, 32, 51, 29, 43, 8, 2, 395, 200, 43, 361, 7, 8, 32, 29, 75, 100, 5, 17, 91, 56, 35, 20, 134, 6, 4, 38, 30, 125, 8, 39, 21, 383, 1, 31, 2, 131, 32, 24, 15, 134, 56, 11, 136, 68, 68, 77, 22, 2, 179, 68, 145, 248, 56, 144, 166, 37, 13, 118, 17, 43, 69, 267, 44, 4, 92, 72, 32, 5, 157, 67, 69, 72, 3, 67, 4, 68, 101, 156, 11, 214, 192, 10, 57, 124, 199, 2, 8, 15, 11, 76, 101, 4, 23, 100, 144, 126, 135, 7, 58, 24, 22, 168, 2, 54, 1, 343, 32, 8, 21, 135, 201, 7, 6, 22, 10, 3, 21, 78, 9, 48, 39, 40, 1, 199, 122, 26, 54, 3, 67, 68, 142, 59, 56, 13, 7, 112, 11, 5, 33, 32, 80, 67, 24, 228, 129, 6, 29, 76, 48, 41, 2, 81, 56, 144, 123, 1, 73, 19, 116, 39, 25, 89, 56, 198, 4, 32, 21, 137, 8, 195, 11, 1, 124, 63, 9, 19, 52, 134, 14, 1, 17, 24, 135, 81, 136, 11, 11, 12, 32, 70, 10, 57, 213, 54, 1, 80, 43, 1, 8, 35, 565, 75, 2, 123, 24, 191, 1, 195, 24, 16, 164, 38, 224}

32768
{2, 62, 4, 113, 149, 64, 48, 30, 1, 267, 112, 1, 21, 272, 136, 23, 113, 154, 44, 4, 41, 317, 136, 219, 71, 25, 216, 96, 159, 1, 111, 181, 107, 117, 215, 74, 3, 23, 236, 34, 86, 49, 89, 155, 112, 40, 224, 3, 29, 59, 8, 184, 144, 29, 35, 10, 3, 311, 134, 11, 127, 133, 11, 6, 51, 83, 8, 61, 75, 21, 84, 97, 67, 112, 133, 22, 133, 248, 4, 43, 137, 232, 15, 20, 1, 92, 21, 159, 89, 23, 375, 4, 16, 30, 22, 61, 91, 202, 8, 46, 200, 1, 132, 24, 131, 117, 135, 9, 124, 137, 14, 116, 5, 43, 1, 43, 309, 27, 4, 108, 2, 315, 371, 13, 51, 16, 42, 175, 95, 1, 156, 4, 156, 85, 3, 11, 5, 7, 44, 20, 6, 42, 156, 18, 96, 78, 57, 23, 2, 398, 244, 9, 43, 108, 6, 15, 119, 105, 4, 27, 1, 20, 263, 118, 3, 109, 26, 14, 135, 89, 22, 10, 66, 53, 11, 5, 155, 134, 48, 127, 96, 144, 89, 258, 12, 13, 45, 19, 48, 85, 96, 39, 43, 4, 1, 161, 112, 143, 128, 17, 243, 3, 2, 19, 127, 9, 29, 232, 78, 41, 9, 7, 128, 36, 7, 112, 137, 104, 155, 8, 1, 16, 47, 5, 37, 27, 160, 87, 16, 390, 22, 2, 23, 225, 126, 1, 4, 13, 38, 104, 245, 23, 28, 2, 34, 48, 270, 135, 27, 241, 31, 22, 22, 24, 53, 11, 1, 16, 123, 20, 1, 113, 75, 180, 36, 112, 23, 108, 2, 160, 86, 2, 16, 31, 39, 317, 16, 120, 677, 91, 59, 4, 246, 19, 29, 35, 48, 299, 2, 131, 259, 13, 35, 32, 69, 136, 123, 76, 361, 87, 49, 239, 6, 64, 48, 286, 1, 63, 12, 468, 242, 22, 2, 46, 90, 3, 108, 31, 157, 111, 113, 37, 256, 104, 135, 71, 26, 64, 102, 58, 86, 16, 4, 73, 448, 269, 19, 380, 1, 86, 13, 140, 172, 100, 297, 14, 16, 64, 41, 17, 150, 153, 47, 10, 34, 25, 76, 81, 91, 21, 70, 40, 1, 267, 12, 8, 29, 47, 60, 250, 16, 3, 8, 67, 1, 41, 766}

usw.

11.4 Die ersten Perioden und Teilperioden der $C^t(s)$

16
{11,5}

32
{3,11,7,11}

64
{2,7,12,2,7,21,1,12}

128
{3,1,7,6,14,15,8,1,5,14,11,4,9,30}

256
{8, 27, 3, 25, 3, 19, 16, 10, 9, 1, 27, 9, 4, 9, 1, 8, 7, 10, 10, 3, 28, 5, 4, 10}

512
{17, 7, 19, 5, 2, 7, 42, 2, 36, 19, 25, 7, 7, 19, 1, 6, 7, 5, 20, 17, 2, 23, 13, 7, 16, 10, 11, 13, 1, 20, 3, 2, 1, 12, 20, 42, 20, 11, 5, 10}

1024
{3, 23, 4, 8, 13, 1, 13, 14, 1, 23, 7, 16, 16, 1, 21, 50, 21, 5, 22, 15, 13, 1, 24, 26, 13, 2, 11, 4, 8, 14, 3, 25, 11, 2, 17, 16, 16, 22, 50, 1, 25, 13, 2, 7, 25, 3, 55, 9, 2, 37, 3, 11, 14, 11, 2, 11, 40, 71, 21, 17, 2, 23, 9, 5, 24, 26}

2048
{1, 27, 23, 1, 1, 49, 25, 4, 29, 1, 34, 7, 19, 32, 19, 16, 42, 4, 42, 28, 9, 1, 15, 6, 28, 1, 8, 9, 5, 4, 10, 11, 9, 21, 15, 33, 2, 30, 19, 44, 50, 2, 74, 4, 3, 27, 15, 6, 13, 26, 32, 9, 42, 10, 42, 52, 5, 16, 6, 11, 17, 1, 2, 15, 30, 19, 11, 48, 2, 15, 15, 11, 50, 28, 24, 50, 33, 25, 17, 6, 19, 61, 9, 16, 17, 10, 15, 4, 23, 19, 28, 5, 5, 33, 17, 1, 2, 5, 14, 4, 10, 20, 11, 25, 51, 26, 7, 43}

4096
{22, 28, 4, 17, 71, 28, 35, 25, 12, 14, 30, 51, 17, 2, 50, 16, 72, 14, 8, 6, 1, 46, 7, 31, 3, 9, 19, 6, 13, 40, 5, 12, 7, 13, 24, 21, 35, 49, 14, 1, 52, 20, 17, 6, 17, 81, 47, 6, 5, 4, 14, 33, 3, 33, 21, 20, 19, 160, 31, 6, 28, 18, 51, 39, 66, 27, 21, 30, 68, 2, 65, 46, 11, 27, 1, 11, 38, 1, 6, 33, 15, 9, 58, 65, 19, 14, 37, 8, 6, 39, 6, 39, 50, 9, 11, 47, 4, 14, 5, 12, 19, 1, 20, 22, 8, 2, 1, 17, 3, 109, 22, 28, 4, 47, 6, 28, 7, 11, 17, 60, 12, 1, 13, 30, 23, 45, 2, 1, 30, 19, 16, 33, 2, 37, 14, 8, 6, 54, 3, 28, 3, 28, 6, 13, 6, 39, 9, 3, 20, 24, 56, 29, 35, 35, 8, 6, 3, 20, 40, 21, 50, 20, 37, 6, 27, 12, 17, 3, 20, 13, 9, 8, 2, 18, 23, 89}

8192
{9, 63, 1, 26, 4, 19, 12, 23, 16, 7, 14, 19, 25, 32, 20, 45, 83, 19, 33, 4, 32, 31, 57, 46, 6, 4, 56, 2, 31, 5, 33, 22, 8, 27, 20, 1, 12, 54, 21, 7, 26, 3, 77, 1, 39, 8, 42, 4, 3, 26, 1, 44, 48, 15, 4, 36, 22, 4, 15, 4, 39, 8, 13, 16, 6, 16, 12, 46, 35, 13, 14, 13, 50, 5, 30, 4, 34, 27, 12, 96, 5, 34, 332, 33, 16, 10, 2, 5, 74, 56, 133, 6, 34, 7, 78, 5, 50, 57, 7, 26, 4, 35, 19, 16, 40, 45, 77, 1, 100, 1, 100, 41, 62, 99, 13, 25, 22, 8, 13, 26, 2, 7, 12, 54, 28, 7, 19, 61, 19, 40, 8, 9, 20, 13, 4, 30, 33, 11, 48, 9, 68, 19, 4, 60, 16, 6, 16, 12, 1, 2, 43, 48, 14, 61, 7, 17, 13, 4, 34, 3, 24, 40, 73, 34, 89, 6, 82, 86, 28, 10, 31, 25, 8, 33, 19, 16, 38, 1, 11, 45, 9, 60, 4, 78, 26, 3, 9, 24, 36, 9, 17, 28, 67, 5, 50, 12, 5, 41, 14, 44, 21, 11, 20, 47, 81, 19, 33, 4, 32, 73, 15, 46, 1, 5, 4, 56, 2, 36, 9, 68, 13, 13, 2, 5, 88, 15, 21, 59, 19, 57, 20, 19, 26, 35, 68, 5, 4, 36, 22, 1, 3, 58, 8, 65, 2, 77, 40, 49, 1, 23, 54, 23, 1, 11, 29, 67, 129, 6, 82, 86, 28, 10, 56, 7, 1, 15, 10, 2, 25, 16, 38, 12, 54, 60, 4, 59, 6, 13, 21, 5, 12, 24, 36, 13, 13, 28}

16384
{48, 67, 11, 2, 52, 26, 44, 8, 83, 116, 62, 1, 1, 72, 104, 67, 45, 46, 3, 45, 41, 1, 66, 45, 2, 1, 13, 10, 26, 16, 15, 135, 7, 4, 55, 57, 19, 44, 5, 35, 36, 7, 1, 36, 40, 72, 8, 16, 24, 17, 19, 48, 33, 8, 14, 17, 9, 30, 20, 1, 13, 98, 15, 1, 6, 3, 21, 1, 24, 34, 37, 39, 24, 23, 24, 13, 13, 59, 24, 52, 64, 3, 14, 72, 3, 24, 14, 3, 9, 25, 5, 5, 33, 33, 30, 18, 9, 33, 67, 8, 7, 56, 1, 18, 125, 3, 52, 69, 2, 11, 8, 26, 32, 13, 67, 49, 18, 46, 14, 76, 20, 36, 11, 108, 68, 2, 65, 134, 1, 39, 100, 66, 5, 7, 25, 28, 52, 19, 13, 50, 9, 5, 53, 4, 5, 6, 8, 72, 45, 20, 2, 1, 26, 90, 18, 41, 15, 170, 43, 1, 49, 129, 8, 5, 55, 87, 48, 78, 2, 52, 26, 41, 3, 8, 39, 86, 78, 32, 10, 14, 3, 127, 64, 22, 31, 91, 3, 11, 68, 7, 61, 51, 2, 14, 10, 26, 16, 27, 123, 11, 55, 13, 63, 7, 37, 40, 11, 25, 8, 36, 40, 3, 52, 17, 8, 16, 24, 36, 48, 72, 39, 21, 99, 27, 10, 22, 24, 11, 23, 31, 4, 40, 1, 24, 25, 35, 72, 5, 19, 52, 64, 92, 24, 14, 1, 11, 30, 38, 90, 81, 19, 8, 64, 18, 115, 13, 52, 79, 3, 7, 1, 26, 32, 80, 41, 4, 46, 70, 60, 26, 23, 27, 81, 68, 2, 65, 135, 25, 20, 32, 6, 2, 36, 36, 50, 3, 27, 5, 28, 3, 20, 29, 32, 50, 14, 3, 10, 30, 19, 6, 8, 31, 32, 9, 53, 4, 11, 23, 3, 90, 18, 5, 51, 170, 44, 87, 26, 65, 8, 21, 39, 13, 190, 131, 50, 45, 41, 75, 3, 32, 10, 14, 3, 2, 72, 53, 51, 13, 22, 77, 45, 1, 13, 35, 33, 9, 59, 7, 48, 80, 11, 131, 3, 1, 67, 45, 25, 43, 45, 33, 79, 52, 83, 100, 8, 14, 26, 29, 1, 20, 14, 85, 13, 16, 6, 24, 35, 54, 4, 3, 37, 49, 1, 23, 26, 63, 139, 14, 72, 41, 3, 34, 10, 66, 30, 18, 42, 47, 35, 56, 133, 11, 124, 2, 7, 10, 73, 107, 4, 5, 18, 23, 23, 14, 33, 43, 17, 3, 23, 13, 37, 216, 1, 134, 25, 15, 5, 32, 6, 2, 36, 19, 17, 49, 1, 11, 19, 36, 20, 49, 72, 7, 10, 30, 11, 4, 49, 32, 55, 7, 4, 9, 2, 23, 116, 37, 228, 50, 37, 26, 79, 15, 52, 75}

usw.

11.5 Die ersten Restklassen modulo $2^{\sigma(s)}$

$n = 0, \sigma(s) = 1, z(0) = 1$
0

$n = 1, \sigma(s) = 2, z(1) = 1$
1

$n = 2, \sigma(s) = 4, z(2) = 1$
3

$n = 3, \sigma(s) = 5, z(3) = 2$
11, 23

$n = 4, \sigma(s) = 7, z(4) = 3$ 7, 15, 59

$n = 5, \sigma(s) = 8, z(5) = 7$
39, 79, 95, 123, 175, 199, 219

$n = 6, \sigma(s) = 10, z(6) = 12$
287, 347, 367, 423, 507, 575, 583, 735, 815, 923, 975, 999

$n = 7, \sigma(s) = 12, z(7) = 30$
231, 383, 463, 615, 879, 935, 1019, 1087, 1231, 1435, 1647, 1703, 1787, 1823, 1855, 2031, 2203, 2239, 2351, 2587, 2591, 2907, 2975, 3119, 3143, 3295, 3559, 3675, 3911, 4063

$n = 8, \sigma(s) = 13, z(8) = 85$
191, 207, 255, 303, 539, 543, 623, 679, 719, 799, 1071, 1135, 1191, 1215, 1247, 1327, 1563, 1567, 1727, 1983, 2015, 2075, 2079, 2095, 2271, 2331, 2431, 2607, 2663, 3039, 3067, 3135, 3455, 3483, 3551, 3687, 3835, 3903, 3967, 4079, 4091, 4159, 4199, 4223, 4251, 4455, 4507, 4859, 4927, 4955, 5023, 5103, 5191, 5275, 5371, 5439, 5607, 5615, 5723, 5787, 5871, 5959, 5979, 6047, 6215, 6375, 6559, 6607, 6631, 6747, 6815, 6983, 7023, 7079, 7259, 7375, 7399, 7495, 7631, 7791, 7847, 7911, 7967, 8047, 8103

$n = 9, \sigma(s) = 15, z(9) = 173$
127, 411, 415, 831, 839, 1095, 1151, 1275, 1775, 1903, 2119, 2279, 2299, 2303, 2719, 2727, 2767, 2799, 2847, 2983, 3163, 3303, 3611, 3743, 4007, 4031, 4187, 4287, 4655, 5231, 5311, 5599, 5631, 6175, 6255, 6503, 6759, 6783, 6907, 7163, 7199, 7487, 7783, 8063, 8187, 8347, 8431, 8795, 9051, 9087, 9371, 9375, 9679, 9711, 9959, 10055, 10075, 10655, 10735, 10863, 11079, 11119, 11567, 11679, 11807, 11943, 11967, 12063, 12143, 12511, 12543, 12571, 12827, 12967, 13007, 13087, 13567, 13695, 13851, 14031, 14271, 14399, 14439, 14895, 15295, 15343, 15839, 15919, 16027, 16123, 16287, 16743, 16863, 16871, 17147, 17727, 17735, 17767, 18011, 18639, 18751, 18895, 19035, 19199, 19623, 19919, 20079, 20199, 20507, 20527, 20783, 20927, 21023, 21103, 21223, 21471, 21727, 21807, 22047, 22207, 22655, 22751, 22811, 22911, 22939, 23231, 23359, 23399, 23615, 23803, 23835, 23935, 24303, 24559, 24639, 24647, 24679, 25247, 25503, 25583, 25691, 25703, 25831, 26087, 26267, 26527, 26535, 27111, 27291, 27759, 27839, 27855, 27975, 28703, 28879, 28999, 29467, 29743, 29863, 30311, 30591, 30687, 30715, 30747, 30767, 30887, 31711, 31771, 31899, 32155, 32239, 32575, 32603

$n = 10, \sigma(s) = 16, z(10) = 476$
359, 479, 559, 603, 767, 859, 1179, 1183, 1351, 1519, 1535, 1627, 2367, 2407, 2495, 2671, 2687, 2791, 2887, 2927, 3103, 3239, 3487, 3535, 3695, 3815, 4319, 4335, 4379, 4635, 4775, 4799, 4815, 4895, 4991, 5087, 5343, 5375, 5423, 5583, 5663, 5823, 5863, 6207, 6247, 6555, 6639, 6703, 6975, 7015, 7103, 7231, 7451, 7471, 7551, 7711, 7835, 7871, 7931, 8095, 8263, 8551, 8671, 8863, 9119, 9199, 9319, 9543, 9599, 9819, 9935, 10151, 10559, 10727, 10907, 11035, 11247, 11431, 11727, 11823, 11887, 12007, 12319, 12495, 12615, 12775, 12799, 13279, 13339, 13535, 13615, 13671, 13855, 13927, 13951, 14015, 14207, 14303, 14363, 14383, 14503, 14543, 14747, 15103, 15167, 15207, 15423, 15487, 15515, 15599, 15643, 15743, 15771, 15855, 16191, 16411, 16431, 16455, 16511, 16635, 16831, 17055, 17127, 17135, 17223, 17311, 17391, 17479, 17511, 17659, 18159, 18343, 18523, 18559, 18919, 19099, 19111, 19135, 19151, 19231, 19367, 19547, 19687, 19707, 20127, 20207, 20511, 20591, 20687, 20807, 21039, 21595, 21615, 21695, 21735, 22015, 22119, 22399, 22495, 22555, 22575, 22695, 22887, 23143, 23167, 23583, 23663, 23707, 23711, 23743, 23963, 24047, 24383, 24571, 24703, 24731, 24815, 25371, 25415, 25471, 25599, 25671, 25851, 26015, 26063, 26343, 26351, 26367, 26439, 26459, 26619, 27039, 27119, 27303, 27343, 27423, 27559, 27675, 27739, 27879, 27903, 27951, 28095, 28191, 28319, 28327, 28351, 28447, 28507, 28527, 28927, 29087, 29231, 29631, 29807, 29823, 29887, 30079, 30207, 30235, 30415, 30575, 30655, 30971, 30975, 31079, 31199, 31335, 31359, 31471, 31727, 31775, 32223, 32283, 32303, 32703, 32763, 32859, 32923, 33007, 33087, 33255, 33531, 33663, 34111, 34151, 34255, 34271, 34535, 34631, 34651, 34927, 35023, 35231, 35279, 35311, 35419, 35579, 35583, 36143, 36159, 36383, 36519, 36543, 36635, 36639, 36719, 36891, 36911, 37119, 37167, 37311, 37407, 37467, 37487, 37607, 37735, 38047, 38171, 38271, 38427, 38607, 38847, 39039, 39135, 39195, 39295, 39535, 39615, 39919, 40039, 40187, 40351, 40415, 40495, 40687, 40943, 41023, 41063, 41183, 41243, 41447, 41627, 41723, 42075, 42215, 42239, 42303, 42343, 42471, 42651, 42911, 43071, 43111, 43215, 43335, 43471, 43611, 43775, 43967, 44143, 44223, 44239, 44359, 44699, 44959, 45083, 45103, 45223, 45359, 45503, 45535, 45599, 45679, 45799, 45851, 46127, 46247, 46407, 47099, 47231, 47327, 47387, 47423, 47487, 47807, 48095, 48155, 48295, 48379, 48879, 48987, 49135, 49215, 49255, 49311, 49563, 49567, 49983, 50143, 50267, 50303, 50407, 50663, 50843, 50847, 51055, 51103, 51271, 51431, 51451, 51455, 51611, 51871, 51951, 52031, 52071, 52335, 52415, 52431, 52507, 52551, 52735, 52763, 53159, 53183, 53319, 53339, 53439, 53887, 53919, 54043, 54303, 54319, 54375, 54439, 54751, 55207, 55291, 55327, 55407, 55535, 55963, 56059, 56191, 56287, 56315, 56347, 56639, 56935, 57179, 57215, 57375, 57671, 57755, 57759, 57839, 57947, 58175, 58203, 58495, 58523, 58527, 58863, 58983, 59247, 59263, 59463, 59559, 59623, 59643, 59647, 60015, 60063, 60143, 60231, 60271, 60571, 60831, 60911, 60955, 61135, 61351, 61375, 61531, 61631, 61663, 61723, 61979, 62119, 62159, 62239, 62279, 62719, 62943, 63023, 63335, 63519, 63551, 63591, 63599, 64047, 64167, 64207, 64251, 64287, 64447, 64507, 64831, 64871, 65127, 65179, 65183, 65275, 65407, 65439

usw.

11.6 Die ersten Restklassen modulo $3 \cdot 2^{\sigma(s)}$ für $\tau(s) = 1...6$

Die ersten Restklassen modulo $3 \cdot 2^{\sigma(s)}$ für $\tau(s) = 1$

$n = 2, \sigma(s) = 4, A_1(n) = 2$
3, 19

$n = 3, \sigma(s) = 5, A_1(n) = 4$
43, 55, 75, 87

$n = 4, \sigma(s) = 7, A_1(n) = 4$
7, 15, 135, 271

$n = 5, \sigma(s) = 8, A_1(n) = 8$
79, 175, 199, 351, 591, 607, 687, 711

$n = 6, \sigma(s) = 10, A_1(n) = 8$
735, 1311, 1599, 1759, 1839, 2335, 2623, 2863

$n = 7, \sigma(s) = 12, A_1(n) = 16$
1087, 1855, 2239, 3295, 4479, 5919, 6447, 6687, 8575, 9279, 10015, 10047, 10431, 10543, 10783, 11487

$n = 8, \sigma(s) = 13, A_1(n) = 32$
255, 303, 543, 1215, 1567, 2431, 3135, 3903, 3967, 4927, 8383, 9439, 9759, 9919, 10623, 11647, 12159, 12415, 13119, 16159, 16575, 16639, 16687, 16927, 17599, 17631, 18111, 19519, 19839, 20287, 20607, 24351

$n = 9, \sigma(s) = 15, A_1(n) = 32$
127, 831, 5311, 5631, 11967, 12543, 13567, 22047, 22207, 23935, 30591, 32895, 33919, 35071, 38079, 40831, 46335, 51967, 54975, 55423, 56703, 66367, 66687, 67839, 71167, 73599, 77503, 78079, 84735, 87583, 88191, 96127

$n = 10, \sigma(s) = 16, A_1(n) = 64$
5823, 7551, 12799, 15103, 22015, 22399, 25599, 28351, 28927, 29823, 30207, 35583, 36543, 39039, 49983, 52735, 58495, 59647, 62719, 66303, 67071, 70911, 71199, 71359, 73087, 79743, 82047, 87231, 91135, 95359, 95743, 101119, 102079, 104575, 107775, 109311, 112767, 115519, 115839, 116991, 122751, 131839, 132607, 136447, 136735, 143871, 145279, 146175, 147583, 152767, 153087, 153471, 159423, 159999, 173311, 174847, 178303, 181375, 182527, 183807, 188287, 189567, 190719, 193791

$n = 11, \sigma(s) = 18, A_1(n) = 64$
511, 1023, 3583, 3775, 9471, 11007, 58623, 91263, 107263, 111103, 113407, 159231, 160255, 162559, 164607, 165375, 169215, 193663, 209919, 213759, 214527, 242815, 251775, 263167, 271615, 273151, 314367, 315903, 320511, 320767, 325119, 353407, 366591, 369663, 407679, 421375, 426751, 427519, 431359, 472063, 475903, 476671, 478719, 485631, 513919, 524799, 527871, 528063, 576511, 578047, 582655, 587263, 628735, 631551, 631807, 635391, 637695, 669823, 684543, 686847, 717951, 740863, 747775, 767103

$n = 12, \sigma(s) = 20, A_1(n) = 128$
14463, 33535, 69631, 71679, 78847, 97023, 184831, 194047, 238335, 244479, 246271, 281599, 303871, 354559, 393727, 396799, 489471, 492543, 560127, 562431, 563199, 566271, 607743, 636031, 666367, 673279, 699391, 701439, 707583, 713727, 773119, 807423, 814591, 820735, 869119, 881151, 921279, 984063, 1016319, 1028607, 1041663, 1063039, 1080063, 1120255, 1145599, 1189119, 1192959, 1270911, 1286911, 1293055, 1298943, 1398783, 1431423, 1437183, 1507839, 1510911, 1538047, 1541119, 1546239, 1549311, 1607679, 1608703, 1611007, 1611775, 1614847, 1656319, 1658367, 1750015, 1750143, 1756159, 1762303, 1855999, 1864191, 1897599, 1909503, 1928703, 1929727, 1967103, 1969855, 1983231, 2024703, 2028543, 2032639, 2064895, 2077183, 2090239, 2128639, 2130687, 2166783, 2175999, 2237695, 2241535, 2281983, 2291199, 2319487, 2343423, 2347519, 2378751, 2401023, 2447359, 2451711, 2479999, 2485759, 2490879, 2493951, 2556415, 2559487, 2594815, 2597887, 2656255, 2706943, 2733183, 2763519, 2770431, 2796543, 2798719, 2870271, 2911743, 2912767, 2917887, 2946175, 2958079, 2966271, 2977279, 3015679, 3031807, 3073279, 3077119

$n = 13, \sigma(s) = 21, A_1(n) = 256$
20991, 35839, 38143, 41983, 96255, 166911, 177151, 183295, 189439, 255231, 259071, 306175, 308223, 333823, 336639, 356863, 372735, 396991, 406527, 451839, 455679, 459775, 492031, 504319, 573951, 603135, 612351, 623103, 650751, 653311, 718335, 721407, 745471, 751615, 770559, 774655, 822271, 828415, 886783, 907135, 918015, 963583, 986623, 1025023, 1083391, 1123071, 1134079, 1143295, 1147903, 1165311, 1190655, 1214463, 1225855, 1242111, 1246207, 1278463, 1297407, 1339903, 1373311, 1404415, 1442815, 1445887, 1458943, 1462783, 1556991, 1561087, 1587327, 1606399, 1642495, 1644543, 1724415, 1757695, 1771519, 1773055, 1773567, 1854463, 1865727, 1869823, 1876735, 1927423, 1936383, 1969663, 1985535, 2012287, 2054143, 2062335, 2075647, 2083839, 2092543, 2132991, 2135295, 2139135, 2190847, 2208895, 2245375, 2246143, 2272255, 2274303, 2280447, 2286591, 2330623, 2387455, 2393599, 2403327, 2428927, 2430975, 2441983, 2454015, 2494143, 2556927, 2564863, 2589183, 2601471, 2640895, 2663167, 2683903, 2718463, 2750463, 2842623, 2848767, 2859775, 2865919, 2871807, 2919423, 2925567, 2960383, 2983935, 2998783, 3004287, 3032575, 3058687, 3060735, 3083775, 3113983, 3122175, 3180543, 3184639, 3229183, 3231231, 3240447, 3245055, 3323007, 3343359, 3375615, 3428863, 3437055, 3470463, 3501567, 3504895, 3539967, 3543039, 3556095, 3559935, 3658239, 3663103, 3701503, 3703551, 3739647, 3810559, 3814399, 3823615, 3854847, 3868671, 3870207, 3872767, 3892351, 3900415, 3951615, 3966975, 3971071, 3973887, 4020223, 4024575, 4058623, 4066815, 4109439, 4129279, 4151295, 4167679, 4172799, 4189695, 4215295, 4287999, 4290559, 4306047, 4342527, 4343295, 4361215, 4369407, 4427775, 4449535, 4453375, 4484607, 4490751, 4502527, 4526079, 4530943, 4539135, 4567039, 4600831, 4646143, 4649983, 4662015, 4738047, 4760319, 4768255, 4781055, 4797439, 4806655, 4815615, 4817407, 4845055, 4912639, 4915711, 4956927, 4963071, 4964863, 5057535, 5095935, 5112319, 5129727, 5155839, 5211135, 5281791, 5317375, 5326335, 5359615, 5384959, 5408767, 5436415, 5491711, 5526015, 5602047, 5751295, 5760255, 5781631, 5798655, 5838847, 5907711, 5911551, 5918719, 5920767, 5967871, 5969919, 5989503, 5997567, 6060031, 6068223, 6117375, 6130687, 6155775, 6179839, 6226431, 6256639, 6264831, 6278143

usw.

Die ersten Restklassen modulo $3 \cdot 2^{\sigma(s)}$ für $\tau(s) = 2$

$n = 4, \sigma(s) = 7, A_2(n) = 2$
187, 315

$n = 5, \sigma(s) = 8, A_2(n) = 6$
39, 123, 219, 295, 379, 475

$n = 4, \sigma(s) = 10, A_2(n) = 14$
367, 423, 583, 975, 999, 1371, 1447, 1947, 1999, 2023, 2395, 2415, 2631, 2971

$n = 6, \sigma(s) = 12, A_2(n) = 36$
231, 463, 615, 879, 1231, 1435, 1647, 2031, 2203, 2587, 2907, 3559, 4063, 4327, 4711, 4975, 5031, 5743, 6127, 7003, 7071, 7215, 7239, 8007, 8655, 9127, 9423, 9627, 10395, 10779, 11167, 11311, 11335, 11751, 12103, 12255

$n = 4, \sigma(s) = 13, A_2(n) = 96$
207, 799, 1071, 1327, 1563, 1983, 2079, 2095, 2271, 2331, 2607, 3039, 3483, 3687, 4159, 4251, 4455, 5023, 5103, 5191, 5275, 5439, 5607, 5871, 5959, 6375, 6559, 6607, 7023, 7375, 7399, 7495, 7791, 8731, 8815, 8911, 8991, 9519, 10207, 10267, 10287, 10855, 11743, 12271, 12351, 12391, 13147, 13215, 13383, 13467, 13807, 14151, 14239, 14751, 14799, 15007, 15175, 15271, 15567, 15591, 15687, 16591, 16923, 17007, 17103, 17455, 17947, 18367, 18399, 18459, 18463, 18655, 18715, 18991, 19047, 19423, 19867, 19935, 20071, 20463, 20583, 20635, 20839, 21339, 21487, 21823, 21991, 21999, 22255, 22431, 22759, 23199, 23367, 23407, 23463, 24175

$n = 7, \sigma(s) = 15, A_2(n) = 160$
415, 2719, 2767, 2799, 2847, 3303, 4287, 5599, 6175, 6783, 7783, 8431, 9087, 9375, 9711, 11079, 12063, 12511, 12571, 13087, 13695, 13851, 14031, 14271, 14439, 14895, 15295, 15919, 16743, 16863, 17727, 17767, 18751, 21103, 21727, 21807, 22911, 23359, 23835, 24303, 24639, 24679, 26527, 27975, 28879, 28999, 29467, 30747, 31711, 32239, 32575, 33183, 34543, 35487, 35535, 36511, 36799, 37423, 38367, 38943, 39271, 39967, 40255, 40551, 41199, 42139, 43423, 44335, 44575, 45279, 45339, 45775, 45855, 47167, 48063, 48607, 48687, 50503, 50535, 51519, 53275, 53551, 53695, 53791, 53871, 54495, 55519, 55579, 55999, 56127, 56167, 56383, 57447, 58015, 58351, 59295, 60607, 61471, 61647, 61767, 62235, 63535, 64479, 65007, 65343, 67311, 68335, 68383, 68839, 69279, 69567, 69823, 70191, 72039, 72319, 72735, 73023, 74623, 74907, 74911, 75247, 76191, 76615, 77103, 77343, 77599, 78543, 79231, 79387, 79567, 79807, 79935, 79975, 80431, 81375, 82279, 82399, 83263, 83271, 86043, 86319, 86463, 86559, 87343, 88287, 88347, 88447, 88767, 88935, 89151, 89371, 89839, 90175, 90783, 91119, 93375, 93511, 94239, 96283, 96303

$n = 8, \sigma(s) = 16, A_2(n) = 384$
1183, 1351, 2367, 3103, 4335, 5343, 6207, 6247, 6975, 7015, 7231, 7471, 7711, 8671, 8863, 9199, 9543, 11035, 11823, 12319, 12495, 12615, 13671, 13855, 13951, 14383, 15207, 15423, 15487, 15643, 15855, 16191, 16831, 17055, 18159, 18559, 19135, 19231, 19687, 20127, 20511, 21039, 22887, 23167, 23583, 23743, 24703, 25371, 25471, 26367, 27039, 27343, 27423, 27903, 27951, 28095, 28191, 28447, 29887, 30079, 30235, 30415, 30655, 30975, 31359, 31471, 32223, 33007, 33087, 33663, 34111, 36639, 36891, 37119, 37167, 37311, 37407, 37735, 38047, 38271, 38607, 39135, 39195, 39295, 39615, 40495, 40687, 41023, 42343, 43071, 43335, 44223, 44359, 45535, 47487, 48879, 49311, 49567, 51871, 51951, 52071, 52507, 53439, 53887, 54043, 54303, 54751, 55327, 56191, 56935, 57759, 58527, 58863, 59263, 60231, 61135, 61375, 61663, 61723, 62239, 62943, 63591, 64047, 64287, 64447, 64831, 65407, 65895, 66015, 67903, 68031, 68223, 69855, 69871, 69915, 70335, 70527, 70879, 70959, 71743, 72511, 72639, 72987, 73407, 75079, 75135, 75471, 76095, 77359, 78031, 78151, 79071, 79207, 79551, 79899, 80703, 80743, 80959, 81135, 81279, 81391, 81727, 82591, 83695, 84687, 85663, 86047, 86343, 86575, 88423, 89119, 89247, 89583, 89919, 90351, 90907, 91903, 92575, 92959, 93439, 93487, 93631, 93727, 93855, 94767, 96511, 96615, 96735, 96895, 97311, 97759, 97839, 98623, 99199, 99687, 101679, 101919, 102171, 102175, 102427, 102655, 102703, 102847, 102943, 103023, 103807, 104143, 104671, 104731, 105151, 106599, 106719, 108447, 108607, 108871, 109503, 109759, 110619, 110895, 111039, 111135, 111387, 112959, 113023, 113343, 113631, 114415, 114847, 117487, 117567, 117607, 117951, 118719, 118975, 119839, 121071, 122175, 123207, 123295, 123711, 124059, 124063, 124399, 125679, 125767, 127167, 127695, 128479, 128559, 128871, 129087, 129127, 129583, 129823, 130719, 131431, 131551, 132255, 132423, 133567, 133759, 134175, 135391, 135451, 135871, 136063, 136495, 137319, 138087, 138175, 138303, 138523, 138543, 138783, 138943, 139743, 139935, 140271, 140671, 141007, 141631, 142107, 143391, 144607, 144927, 145023, 145087, 145435, 145455, 146239, 146559, 146671, 146715, 146815, 147903, 149631, 150207, 150223, 150303, 150759, 151879, 154239, 154783, 154815, 155119, 155455, 155775, 155887, 156543, 158415, 159391, 159519, 160303, 160959, 161151, 161307, 161487, 161727, 162151, 162271, 162543, 162847, 163375, 164079, 165183, 165223, 167215, 167455, 167707, 168559, 168807, 169119, 170367, 171567, 171759, 172095, 172135, 172255, 173415, 173983, 175039, 175431, 176155, 176431, 176575, 176607, 176671, 176923, 178495, 178879, 179167, 180639, 182943, 183103, 183487, 183579, 184255, 184959, 185115, 185823, 186399, 186607, 187263, 187711, 188007, 188743, 189247, 189595, 190335, 191215, 192207, 192447, 192703, 192735, 192795, 193231, 193311, 194095, 194407, 194623, 195519, 195903, 196255, 196479

usw.

Die ersten Restklassen modulo $3 \cdot 2^{\sigma(s)}$ für $\tau(s) = 3$

$n = 6, \sigma(s) = 10, A_3(n) = 2$
507, 1531

$n = 7, \sigma(s) = 12, A_3(n) = 8$
3675, 5115, 5799, 5883, 7771, 9211, 9895, 9979

$n = 8, \sigma(s) = 13, A_3(n) = 40$
679, 1135, 1191, 3067, 3835, 4507, 5371, 5787, 5979, 6631, 6747, 7911, 8047, 8103, 8871, 9327, 11259, 12027, 12699, 13051, 13563, 13915, 14407, 14823, 15451, 15823, 16039, 16239, 17575, 21243, 22107, 22171, 22363, 22599, 23131, 23643, 24015, 24231, 24295, 24487

$n = 9, \sigma(s) = 15, A_3(n) = 136$
411, 1095, 1275, 1903, 2119, 2299, 2983, 3163, 6255, 6759, 8347, 9051, 9679, 10075, 10735, 10863, 11119, 11679, 12967, 15343, 16027, 16287, 18639, 18895, 19035, 19623, 20079, 20199, 20527, 21223, 21471, 22939, 23803, 24559, 25503, 25831, 26535, 27111, 27291, 27759, 27855, 29743, 29863, 30687, 31771, 31899, 32155, 33607, 34671, 34887, 35047, 35067, 35751, 35931, 36379, 36775, 36955, 37999, 41115, 42447, 42727, 42823, 42843, 43503, 43887, 44911, 45595, 45735, 48111, 48795, 49639, 49915, 51663, 52687, 53295, 53991, 55707, 56571, 57327, 57415, 58459, 58471, 58599, 58855, 59035, 62511, 62631, 63079, 63655, 64539, 64923, 65371, 65947, 66375, 66631, 66811, 67815, 69147, 69543, 69723, 70767, 71791, 72295, 74587, 75495, 75591, 76399, 77215, 77679, 78363, 81823, 82407, 82683, 84175, 84571, 85159, 85455, 85615, 85735, 87007, 90183, 91039, 91227, 91239, 91623, 91803, 92071, 92647, 92827, 93295, 93391, 95847, 96223, 96423, 97435, 98139

$n = 10, \sigma(s) = 16, A_3(n) = 416$

559, 859, 1179, 1519, 2407, 2671, 2791, 2887, 3487, 3535, 4635, 4815, 5583, 6555, 6639, 6703, 8095, 8263, 8551, 9319, 11247, 11431, 11887, 12775, 13279, 13339, 13615, 13927, 14503, 15771, 16411, 16431, 16455, 16635, 17127, 17223, 17311, 17391, 17479, 17511, 17659, 18343, 18523, 19099, 21615, 21735, 22119, 22495, 22555, 22575, 22695, 23143, 23707, 25671, 26343, 26439, 27559, 27675, 27879, 28507, 28527, 29631, 31335, 32283, 32703, 32859, 32923, 33255, 33531, 34255, 34927, 35023, 35311, 35419, 36159, 38427, 38847, 39535, 39919, 40039, 40351, 42075, 42303, 42471, 42651, 43111, 43215, 43471, 44143, 44239, 44959, 45103, 45223, 45679, 45799, 46407, 48379, 48987, 49135, 49215, 49255, 49563, 50143, 50407, 50847, 51055, 51103, 51271, 51451, 52335, 52431, 52551, 53319, 53919, 54319, 54375, 55207, 55407, 55963, 56287, 56347, 57375, 58203, 58983, 59247, 59559, 59623, 59643, 60015, 60063, 60271, 60571, 60831, 60955, 61531, 62119, 63519, 64207, 65127, 65179, 65439, 66715, 68463, 68775, 69231, 69351, 70171, 70351, 70431, 70623, 71119, 72091, 72175, 73371, 74655, 75687, 76263, 76443, 76783, 79839, 80079, 80283, 81051, 81307, 81967, 81991, 82171, 82663, 82671, 82759, 82927, 83047, 84903, 85083, 85743, 86127, 86223, 87151, 87271, 87655, 88111, 88231, 89499, 90267, 90951, 91207, 91551, 91599, 91879, 91887, 91975, 91995, 92655, 93211, 93415, 94063, 94623, 95167, 96111, 96507, 96871, 97263, 97819, 98239, 98395, 98791, 99067, 99807, 100071, 100167, 100767, 100815, 101695, 102447, 103143, 103707, 103963, 104383, 105723, 105951, 106479, 106779, 106983, 107163, 107611, 107751, 107839, 108007, 108187, 108751, 111663, 111783, 111943, 112863, 112923, 113691, 114523, 114751, 115099, 115803, 116199, 116383, 116967, 117147, 117871, 117967, 118087, 118299, 118695, 118855, 118875, 119455, 119911, 120943, 122715, 122911, 123375, 123739, 124519, 124783, 125095, 125179, 125551, 125599, 126367, 126447, 127515, 127815, 129055, 129135, 130407, 130663, 130975, 131631, 131931, 132591, 133479, 133743, 133863, 133959, 133999, 134311, 134559, 134607, 134767, 134887, 135967, 136159, 137775, 138907, 139167, 139335, 139623, 140191, 140391, 141223, 141799, 141979, 142503, 142959, 143847, 144351, 144411, 144687, 144999, 145375, 145575, 145615, 145819, 146587, 147483, 148207, 148383, 148551, 148731, 149415, 149595, 150171, 150439, 150619, 151279, 151663, 151759, 153567, 153627, 154215, 154779, 155035, 155803, 156487, 157087, 157135, 157423, 157531, 158191, 158631, 159579, 160159, 161647, 162043, 162799, 163995, 165327, 165343, 165607, 165703, 165999, 166095, 166303, 166351, 166383, 166491, 167983, 168679, 169243, 170607, 170991, 171111, 171259, 171423, 171487, 172015, 172315, 172519, 172699, 173287, 174183, 174543, 175215, 175311, 176031, 176175, 176295, 176751, 176871, 177199, 177319, 178399, 178459, 179227, 179451, 180207, 180327, 181215, 181339, 181479, 181735, 182127, 182175, 182343, 182503, 182523, 182683, 183835, 184231, 184411, 185391, 186279, 187035, 187359, 187419, 188251, 188911, 190695, 191343, 191643, 191983, 192027, 192603, 193051, 193191, 193351, 194671, 195279, 195943, 196251

usw.

Die ersten Restklassen modulo $3 \cdot 2^{\sigma(s)}$ für $\tau(s) = 4$

$n = 8, \sigma(s) = 13, A_4(n) = 2$
12283, 20475

$n = 9, \sigma(s) = 15, A_4(n) = 18$
2727, 6907, 8187, 11943, 16123, 30715, 39675, 39931, 41563, 48891, 50779, 63483, 68263, 72699, 73723, 74331, 77479, 83547, 9 15 18

$n = 10, \sigma(s) = 16, A_4(n) = 86$
603, 1627, 5863, 9819, 11727, 12007, 18919, 19111, 19707, 21595, 24571, 25851, 26619, 27303, 27739, 28327, 34651, 36519, 37467, 43611, 48295, 54439, 55291, 56059, 59463, 61351, 64167, 64251, 64507, 65275, 66139, 70311, 73467, 75355, 77263, 85243, 89199, 91387, 92155, 92839, 95343, 101115, 102055, 102255, 103003, 107259, 109147, 110235, 112635, 116379, 121851, 123291, 123483, 124999, 129703, 129787, 132699, 135847, 136935, 139003, 143079, 149991, 150183, 152667, 154735, 155643, 158811, 159399, 160879, 165723, 166651, 167791, 172795, 175771, 178171, 179367, 181915, 185511, 186363, 187131, 187387, 188827, 189019, 192423, 195579, 196347

$n = 11, \sigma(s) = 18, A_4(n) = 372$
2043, 2811, 3183, 4143, 5287, 7419, 8955, 9883, 10095, 12199, 13359, 13479, 15355, 15775, 16795, 20391, 26695, 28063, 29799, 32671, 33895, 38503, 41887, 42087, 46695, 51963, 52315, 55911, 56431, 58087, 58107, 59227, 59599, 62575, 67791, 68635, 69487, 70375, 74983, 75847, 77007, 80923, 84039, 84199, 85531, 94747, 95199, 98907, 100519, 101019, 105127, 105583, 105627, 108123, 111727, 112359, 112807, 115963, 116175, 116455, 118639, 119919, 123367, 124647, 126831, 131559, 140775, 143451, 151195, 154791, 157275, 158887, 162471, 162555, 163483, 165799, 167079, 168615, 170395, 171771, 173991, 175567, 178671, 179611, 181063, 182767, 183207, 187375, 190279, 190959, 193627, 195567, 201307, 204783, 205915, 206959, 207099, 207451, 208539, 211623, 212827, 214683, 217767, 219247, 220923, 221595, 222043, 223855, 224719, 229447, 232911, 233071, 233191, 237639, 240103, 246855, 250459, 250971, 256603, 257115, 257275, 257691, 261231, 263835, 264027, 264187, 264795, 264955, 265327, 266287, 269563, 270747, 271099, 272239, 273519, 275503, 275623, 280431, 282015, 282535, 286623, 289647, 291943, 300123, 304231, 306267, 308839, 313179, 314107, 314619, 318055, 320251, 320763, 321531, 322215, 324327, 328443, 328935, 329935, 331431, 334875, 339151, 339483, 346183, 357343, 359067, 361051, 363163, 363771, 365535, 366759, 367771, 369915, 370267, 370683, 371355, 374503, 374751, 375963, 378319, 380583, 382063, 385179, 386511, 386791, 388975, 393703, 395727, 401499, 402919, 405595, 406107, 413787, 416935, 417435, 419419, 424347, 424615, 424699, 429223, 430759, 431847, 433915, 435015, 436135, 437991, 440815, 444903, 445351, 453103, 457711, 459867, 465147, 466779, 466927, 469243, 469755, 470683, 473199, 473767, 474279, 476827, 477435, 477807, 479911, 480423, 480999, 481275, 483067, 483739, 487143, 487335, 488103, 490491, 494055, 495055, 499783, 508999, 513115, 519259, 519835, 520239, 523375, 523431, 523515, 525979, 526171, 526939, 529575, 532891, 534171, 535663, 536487, 539643, 540063, 541083, 542575, 544159, 548767, 550983, 551791, 552351, 556959, 558183, 562267, 562791, 566175, 568411, 575323, 576603, 576763, 580719, 582375, 582907, 583515, 583675, 583887, 584359, 586471, 586863, 590587, 591079, 592923, 593575, 593775, 594663, 597019, 599271, 600135, 601627, 605211, 608487, 609819, 619035, 621211, 624807, 625915, 627679, 628903, 629415, 629871, 632059, 632827, 633499, 636015, 636895, 637095, 638107, 640251, 640743, 642727, 642927, 647323, 647655, 648655, 657871, 663643, 668251, 675483, 675931, 679579, 683175, 686491, 687771, 690087, 693991, 694683, 697159, 699855, 700135, 703899, 705351, 707047, 707055, 711663, 714567, 717915, 722011, 725595, 727291, 728923, 730203, 731247, 731739, 731899, 735343, 736423, 737115, 739579, 739951, 742567, 743143, 743419, 743535, 746331, 748143, 749007, 749287, 749479, 750247, 752635, 753735, 756199, 757359, 757479, 764391, 774747, 780891, 781563, 782383, 785575, 785659

usw.

Die ersten Restklassen modulo $3 \cdot 2^{\sigma(s)}$ für $\tau(s) = 5$

$n = 10, \sigma(s) = 16, A_5(n) = 2$
32763, 98299

$n = 11, \sigma(s) = 18, A_5(n) = 30$
6139, 14331, 23547, 117415, 122875, 126631, 148059, 211707, 276475, 285691, 327675, 371367, 376827, 410203, 418395, 427611, 473851, 482043, 491259, 530427, 589819, 633511, 638971, 641703, 647163, 650919, 680539, 689755, 744187, 753403

$n = 12, \sigma(s) = 20, A_5(n) = 156$
5211, 49147, 57339, 76455, 104167, 110311, 115291, 196603, 199419, 205563, 223303, 350971, 359079, 360187, 365223, 397915, 399355, 404059, 407547, 408315, 416763, 448231, 460635, 473083, 482299, 510631, 511227, 517371, 519847, 541275, 543483, 567975, 606811, 615003, 621307, 624219, 630523, 670887, 677031, 677883, 687099, 703143, 709723, 715867, 741979, 777327, 780967, 783471, 790183, 855291, 896463, 903655, 965371, 1014951, 1021947, 1032187, 1040379, 1053787, 1105915, 1121391, 1125031, 1191579, 1197723, 1247995, 1254139, 1304571, 1391355, 1407655, 1413799, 1456123, 1456891, 1465083, 1465339, 1470375, 1474299, 1509211, 1513467, 1535643, 1551015, 1559803, 1565947, 1576815, 1589851, 1592059, 1598043, 1607259, 1616551, 1624743, 1633959, 1648635, 1654779, 1663579, 1672795, 1719463, 1725607, 1726459, 1735675, 1751719, 1825903, 1832047, 1868379, 1877595, 1903867, 1945039, 1991067, 2063527, 2070523, 2088955, 2146299, 2169967, 2201319, 2207463, 2212443, 2240155, 2246299, 2293755, 2320455, 2353147, 2439931, 2448123, 2457339, 2495067, 2496507, 2501211, 2513659, 2518951, 2522875, 2545383, 2562043, 2570235, 2579451, 2584219, 2599591, 2607783, 2616999, 2625391, 2646619, 2655835, 2673319, 2682535, 2697211, 2703355, 2703963, 2718459, 2727675, 2806875, 2813019, 2839131, 2878119, 2887335, 2916955, 2926171, 3000807, 3039643, 3062523, 3129339

usw.

Die ersten Restklassen modulo $3 \cdot 2^{\sigma(s)}$ für $\tau(s) = 6$

$n = 12, \sigma(s) = 20, A_6(n) = 2$
1310715, 2359291

$n = 13, \sigma(s) = 21, A_6(n) = 46$
174759, 245755, 253947, 524283, 604923, 669691, 803419, 811611, 1063675, 1120251, 1507323, 1670907, 1813159, 1821351, 1869403, 1966075, 2342907, 2710267, 2758651, 2766843, 2801659, 2879143, 2900571, 3160827, 3359323, 3824635, 3910311, 3932155, 3966555, 4063227, 4369063, 4448251, 4718587, 4799227, 4807419, 4855803, 4898811, 4976295, 5005915, 5314555, 5456475, 5701627, 5865211, 5921787, 6015655, 6029307

$n = 14, \sigma(s) = 23, A_6(n) = 410$
19195, 34395, 90715, 359163, 398427, 497659, 597103, 639579, 764583, 780283, 867067, 875259, 917499, 922203, 936699, 983035, 1000027, 1006587, 1011355, 1302523, 1415163, 1416955, 1427943, 1514607, 1528411, 1567399, 1682895, 1747623, 1796167, 1830567, 1928859, 1933051, 1938087, 1981179, 2083495, 2090235, 2144935, 2168827, 2242555, 2282587, 2297083, 2310747, 2376283, 2384475, 2538235, 2587815, 2605051, 2613243, 2820859, 3047163, 3189415, 3197607, 3298471, 3299323, 3305383, 3348475, 3356667, 3398767, 3441243, 3442267, 3455739, 3490395, 3599451, 3719163, 3813019, 4047451, 4106919, 4118247, 4137723, 4209403, 4255399, 4276219, 4283131, 4330075, 4414459, 4499035, 4556379, 4635303, 4653051, 4663975, 4715631, 4787451, 4828903, 4835815, 5129883, 5179227, 5193723, 5339899, 5345959, 5389051, 5389479, 5397243, 5483175, 5498107, 5636091, 5904379, 5912571, 5947387, 5995687, 6021115, 6046299, 6295407, 6367227, 6455035, 6549159, 6605479, 6663631, 6709659, 6849115, 6887419, 6919911, 6970363, 7029339, 7112283, 7127035, 7135227, 7154343, 7215099, 7219803, 7365211, 7426651, 7436967, 7526119, 7589115, 7605927, 7764987, 7869531, 7944955, 7953147, 7995387, 8281083, 8337403, 8407803, 8471131, 8479323, 8580187, 8587099, 8797351, 8886267, 8927995, 8985711, 9010939, 9118459, 9161383, 9168891, 9246715, 9255675, 9371643, 9388635, 9399963, 9537115, 9616039, 9682939, 9691131, 9696367, 9703279, 9768187, 9775099, 9805563, 9917019, 9945691, 9956007, 10110619, 10117531, 10184775, 10321659, 10327783, 10377979, 10463911, 10472103, 10533543, 10557435, 10622971, 10627675, 10631163, 10665979, 10671195, 10685691, 10764891, 10926843, 10993659, 11013799, 11209467, 11277403, 11287291, 11529895, 11578023, 11687079, 11687931, 11688955, 11693991, 11737083, 11787375, 11815675, 11830875, 11887195, 11893927, 12115963, 12135079, 12201627, 12294139, 12393583, 12417703, 12436059, 12569851, 12576763, 12598011, 12644007, 12663547, 12664827, 12671739, 12718683, 12745723, 12803067, 12807835, 12887643, 13025275, 13052583, 13217511, 13224423, 13424359, 13592647, 13728507, 13729531, 13734567, 13777659, 13806247, 13879975, 13886715, 14079067, 14155771, 14292987, 14334715, 14335995, 14352379, 14384295, 14401531, 14409723, 14443099, 14617339, 14786299, 14843643, 14897755, 14936743, 14985895, 14994087, 15052239, 15094951, 15095803, 15195247, 15237723, 15276027, 15358971, 15515643, 15609499, 15611899, 15673339, 15745627, 15753819, 15815259, 15914727, 16051879, 16072699, 16295515, 16333563, 16625383, 16674727, 16717819, 16726011, 16811611, 16859739, 16968795, 16975707, 17136379, 17175643, 17185959, 17316603, 17399547, 17416795, 17507067, 17541799, 17549991, 17635323, 17652475, 17694715, 17699419, 17713915, 17783803, 17925723, 18004647, 18071547, 18084975, 18091887, 18156795, 18163707, 18192379, 18205159, 18291823, 18334299, 18460111, 18499227, 18506139, 18524839, 18607783, 18706075, 18715303, 18716391, 18758395, 18766587, 18852519, 18867451, 19011579, 19016283, 19054587, 19087963, 19161691, 19365031, 19390459, 19402407, 19666011, 19675899, 19824379, 19918503, 19974823, 20077563, 20133883, 20204283, 20218459, 20232955, 20267611, 20275803, 20282535, 20376667, 20496379, 20504571, 20523687, 20682747, 20782191, 20806311, 20884135, 20895463, 20914939, 20958459, 20965371, 21052155, 21134331, 21196443, 21333595, 21412519, 21413883, 21430267, 21492847, 21564667, 21812967, 21907099, 21956443, 21970939, 21981255, 22118139, 22166695, 22174459, 22194855, 22260391, 22268583, 22413307, 22467675, 22544379, 22689787, 22723323, 22740987, 22790139, 22823515, 22831707, 23005947, 23072623, 23144443, 23174907, 23286363, 23325351, 23326375, 23374503, 23483559, 23484411, 23486875, 23583855, 23697127, 23806555, 23889499, 23912443, 23931559, 23992315, 23997019, 23998107, 24000507, 24061947, 24134235, 24214183, 24366331, 24383143, 24440487, 24461307, 24542203, 24646747, 24684123, 24730363, 24772603, 25013991, 25058299, 25063335, 25106427

usw.

11.7 Zwei Algorithmen zur Generierung der Zahlen $z(n)$

Programmiersprache: PARI/GP

Zeilenorientierter Algorithmus (2011)

```
max=1000; x=max; p=matrix(3*x,3*x);


n = 6..10 als Startwerte (lassen sich auch generieren)

  p[x+1,x+6]=1;    p[x+2,x+6]=1;    p[x+3,x+6]=3;     p[x+4,x+6]=12;
  p[x+1,x+7]=1;    p[x+2,x+7]=1;    p[x+3,x+7]=2;     p[x+4,x+7]=7;
  p[x+1,x+8]=1;    p[x+2,x+8]=2;    p[x+3,x+8]=2;     p[x+5,x+7]=30;
  p[x+1,x+9]=1;    p[x+2,x+9]=2;    p[x+4,x+8]=5;     p[x+6,x+9]=37;
  p[x+1,x+10]=1;   p[x+3,x+9]=3;    p[x+5,x+8]=19;    p[x+7,x+9]=173;
  p[x+2,x+10]=3;   p[x+5,x+9]=9;    p[x+6,x+8]=85;    p[x+7,x+10]=99;
  p[x+3,x+10]=5;   p[x+4,x+9]=3;    p[x+6,x+10]=23;
  p[x+5,x+10]=7;   p[x+4,x+10]=7;   p[x+8,x+10]=476;

for(n=11, max, m=floor((n-6)/12);

k=5; a=0; b=1;
  until(b>m, a=a+p[x+n-12*b-5,x+n-12*b]*p[x+12*b-2,x+12*b]; b++);
  p[x+n-k,x+n]=p[x+n-7,x+n-5]-a;
  p[x+n-k-1,x+n]=p[x+n-5,x+n];

k=6; a=0; b=1;
  until(b>m, a=a+p[x+n-12*b-5,x+n-12*b]*p[x+12*b-3,x+12*b]; b++);
  until(k>8, p[x+n-k-1,x+n]=p[x+n-k,x+n]-p[x+n-8,x+n-5]+a; k++);

k=8; a=0; b=1;
  until(b>m, a=a+p[x+n-12*b-5,x+n-12*b]*p[x+12*b-4,x+12*b]; b++);
  until(k>10, p[x+n-k-2,x+n]=-p[x+n-k,x+n]+2*p[x+n-k-1,x+n]+p[x+n-9,x+n-5]-a; k++);

k=10; until(k>12*(m+1)+1, a=0; b=1;
  until(b>m, a=a+p[x+n-12*b-5,x+n-12*b]*p[x+12*b+5-k,x+12*b]; b++);
  p[x+n-k-3,x+n]=p[x+n-k,x+n]-3*p[x+n-k-1,x+n]+3*p[x+n-k-2,x+n]-p[x+n-k,x+n-5]+a; k++);


i=1; p[x+n-4,x+n]=0; p[x+n-3,x+n]=0; p[x+n-2,x+n]=0;

until(i>n-5,
  p[x+n-4,x+n]= p[x+n-4,x+n]+p[x+i,x+n];
  p[x+n-3,x+n]= p[x+n-3,x+n]+p[x+i,x+n]*(n-i-2);
  p[x+n-2,x+n]= p[x+n-2,x+n]+p[x+i,x+n]*(n-i-2)*(n-i+3)/2; i++));


Werte als Tabelle ausgeben

for(n=6,max, for(k=1,n-2, print(n,,p[x+k,x+n])); print);
```

Spaltenorientierter Algorithmus (2014)

An der allgemeinen Form dieses Algorithmus wird noch gearbeitet. Doch schon diese ersten Ergebnisse (Spalten) deuten auf die Existenz einer solchen allgemeinen Form hin.

```
max=1000; p=matrix(max, max);

SPALTE 1
for(n=1, max, p[1,n]=1);

SPALTE 2
for(n=1, max, p[2,n]=floor((n-1)*log(3)/log(2))-n-1);

SPALTE 3
p[3,8]=p[2,8];

for(n=8, max,
  if(p[2,n-1]==p[2,n]-1, p[3,n+1]=p[3,n]+1);

  if((p[2,n+1]==p[2,n]+1) && (p[2,n-1]==p[2,n]-1), p[3,n+1]=p[3,n]+p[2,n]+1);

  if((p[2,n+1]==p[2,n]+1) && (p[2,n-1]==p[2,n]), p[3,n+1]=p[3,n]+p[2,n]);
);

SPALTE 4
p[4,9]=p[3,9];

for(n=9, max,
  if((p[2,n-2]==p[2,n]-2), p[4,n+1]=p[4,n]+p[2,n]+1);
  if((p[2,n-2]==p[2,n]-1), p[4,n+1]=p[4,n]+p[2,n]-1);

  if((p[2,n+1]==p[2,n]+1) && (p[2,n-1]==p[2,n]-1), p[4,n+1]=p[4,n]+p[3,n]+p[2,n]-1);

  if((p[2,n+1]==p[2,n]+1) && (p[2,n-1]==p[2,n]), p[4,n+1]=p[4,n]+p[3,n]+1);
);

SPALTE 5
p[5,10]=p[4,10];

for(n=10, max,
  if((p[2,n-2]==p[2,n]-2), p[5,n+1]=p[5,n]+p[3,n]+p[2,n]-4);
  if((p[2,n-2]==p[2,n]-1), p[5,n+1]=p[5,n]+p[3,n]-p[2,n]+3);

  if((p[2,n+1]==p[2,n]+1) && (p[2,n-1]==p[2,n]-1), p[5,n+1]=p[5,n]+p[4,n]+p[3,n]-p[2,n]+3);

  if((p[2,n-1]==p[2,n]) && (p[2,n-3]==p[2,n]-2), p[5,n+1]=p[5,n]+p[4,n]+p[2,n]+2);

  if((p[2,n-1]==p[2,n]) && (p[2,n-3]==p[2,n]-1), p[5,n+1]=p[5,n]+p[4,n]+p[2,n]-1);
);

usw.
```

Die generierten Werte der beiden Algorithmen bis $n = 30$ und Spalte 11. Der letzte Wert einer Zeile entspricht $z(n)$.

Spalte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n											
6	1	1	3	12							
7	1	1	2	7	30						
8	1	2	2	5	19	85					
9	1	2	3	3	9	37	173				
10	1	3	5	7	7	23	99	476			
11	1	3	6	9	12	12	43	194	961		
12	1	4	9	16	23	30	30	113	525	2652	
13	1	5	14	28	47	66	85	85	331	1570	8045
14	1	5	15	34	62	99	136	173	173	698	3387
15	1	6	20	50	103	179	278	377	476	476	1966
16	1	6	21	55	120	228	379	573	767	961	961
17	1	7	27	77	180	366	665	1077	1602	2127	2652
18	1	7	28	83	203	431	822	1431	2258	3303	4348
19	1	8	35	112	292	658	1323	2430	4122	6399	9261
20	1	9	44	154	434	1045	2233	4329	7749	12909	19809
21	1	9	45	164	483	1218	2721	5517	10304	17953	29335
22	1	10	54	210	658	1757	4144	8833	17314	31553	53992
23	1	10	55	219	705	1944	4746	10494	21338	40389	71719
24	1	11	65	275	933	2697	6890	15912	33765	66578	123132
25	1	12	77	350	1265	3867	10389	25160	55844	115010	221702
26	1	12	78	363	1350	4257	11805	29511	67679	144089	287384
27	1	13	90	442	1727	5702	16511	42987	102444	226435	468476
28	1	13	91	454	1807	6094	18061	48202	117855	267409	568583
29	1	14	104	546	2273	7982	24563	67928	171842	402883	884183
30	1	14	105	559	2366	8460	26533	74855	193358	463287	1039766