Beweis, dass die diophantische Gleichung $z^4 - y^4 = x^2$ keine nicht-triviale Lösung besitzt.

(1) $z^4 - y^4 = x^2$ $\qquad x, y, z \in \mathbb{N}$

Man kann sich auf Lösungen (x, y, z) mit ggT(x, y, z) = 1 beschränken, woraus sofort die paarweise Teilerfremdheit von x, y, z folgt. Von den Zahlen x, y, z ist dann genau eine gerade. Es sei x ungerade.

dann gilt : $\mathrm{ggT}(x, y, z) = \mathrm{ggT}(x, y^2, z^2) = \mathrm{ggT}(x, z^2 + y^2, z^2 - y^2) = 1$

aus (1) : $(z^2 + y^2)(z^2 - y^2) = x^2$

Wegen $\mathrm{ggT}(x, z^2 + y^2, z^2 - y^2) = 1$ müssen $(z^2 + y^2)$ und $(z^2 - y^2)$ selbst Quadratzahlen sein.

somit gilt : **(2)** $z^2 + y^2 = p^2$

(3) $z^2 - y^2 = q^2$

Für Gleichung (2) und (3) existieren dann primitive pythagoreische Trippel wie folgt.

für (2): $p = a^2 + b^2 \quad , \quad y = 2ab \quad , \quad z = a^2 - b^2$

für (3): $q = u^2 - v^2 \quad , \quad y = 2uv \quad , \quad z = u^2 + v^2$

somit gilt : **(4)** $a^2 + b^2 = u^2 - v^2$

(5) $ab = uv$

aus (5): $a = uv/b$

eing. in (4): $(uv/b)^2 + b^2 = u^2 - v^2$

=> $(uv)^2 + b^4 = (ub)^2 - (vb)^2$

=> $b^4 + (vb)^2 = (ub)^2 - (uv)^2$

=> $b^2(b^2 + v^2) = u^2(b^2 - v^2)$

$\Rightarrow$ **(6)** $(b^2 + v^2)/(b^2 - v^2) = u^2/b^2$

es gilt: $(b^2 + v^2)^2 - (b^2 - v^2)^2 = (2bv)^2$

$\Rightarrow$ **(7)** $[(b^2 + v^2)/(b^2 - v^2)]^2 - 1 = [2bv/(b^2 - v^2)]^2$

aus (6) und (7): $(u^2/b^2)^2 - 1 = [2bv/(b^2 - v^2)]^2$

$\Rightarrow$ $u^4 - b^4 = [2b^3v/(b^2 - v^2)]^2$

somit gilt: $2b^3v/(b^2 - v^2) = r$ mit $r \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ **(8)** $u^4 - b^4 = r^2$

es gilt: $z = u^2 + v^2 \Rightarrow u < z$

$y = 2ab \Rightarrow b < y$

Mit $u < z$ und $b < y$ liegt in Gleichung (8) eine kleinere Lösung als in Gleichung (1) vor.
Dies widerspricht der Minimalität von x, y und z.